



TUGAS AKHIR -TE 141599

**KOMPENSASI KESALAHAN SENSOR MENGGUNAKAN
PROPORTIONAL MULTIPLE INTEGRAL OBSERVER
(PMIO) PADA KONTROL *TRACKING* SISTEM PENDULUM
KERETA**

Aldhino Putra
NRP 2211 100 070

Dosen Pembimbing
Dr. Trihastuti Agustinah, S.T., M.T.

JURUSAN TEKNIK ELEKTRO
Fakultas Teknologi Industri
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2015



FINAL PROJECT -TE 141599

**SENSOR FAULT COMPENSATION USING PROPORTIONAL
MULTIPLE INTEGRAL OBSERVER (PMIO) FOR TRACKING
CONTROL OF THE PENDULUM-CART SYSTEM**

Aldhino Putra
NRP 2211 100 070

Supervisor
Dr. Trihastuti Agustinah, S.T., M.T.

ELECTRICAL ENGINEERING DEPARTMENT
Faculty of Industrial Technology
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2015

**KOMPENSASI KESALAHAN SENSOR MENGGUNAKAN
PROPORTIONAL MULTIPLE INTEGRAL OBSERVER (PMIO)
PADA KONTROL TRACKING SISTEM PENDULUM KERETA**

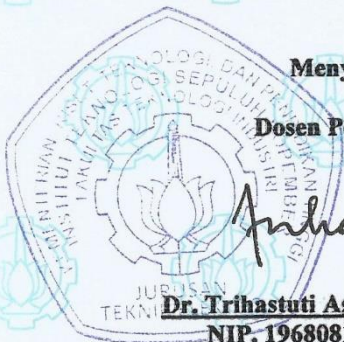
TUGAS AKHIR

**Diajukan untuk Memenuhi Sebagian Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Teknik
Pada**

**Bidang Studi Teknik Sistem Pengaturan
Jurusan Teknik Elektro
Institut Teknologi Sepuluh Nopember**

Menyetujui :

Dosen Pembimbing



Dr. Trihastuti Agustinah, S.T., M.T.

NIP. 19680812 199403 2 001

**SURABAYA
JULI, 2015**

**KOMPENSASI KESALAHAN SENSOR MENGGUNAKAN
PROPORTIONAL MULTIPLE INTEGRAL OBSERVER (PMIO)
PADA KONTROL TRACKING SISTEM PENDULUM KERETA**

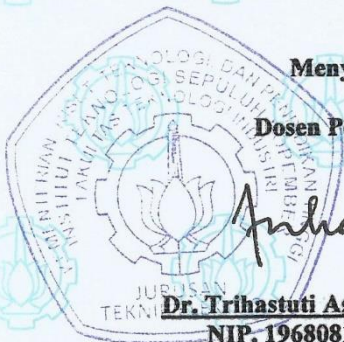
TUGAS AKHIR

**Diajukan untuk Memenuhi Sebagian Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Teknik
Pada**

**Bidang Studi Teknik Sistem Pengaturan
Jurusan Teknik Elektro
Institut Teknologi Sepuluh Nopember**

Menyetujui :

Dosen Pembimbing



Dr. Trihastuti Agustinah, S.T., M.T.

NIP. 19680812 199403 2 001

**SURABAYA
JULI, 2015**

Halaman ini sengaja dikosongkan

KOMPENSASI KESALAHAN SENSOR MENGGUNAKAN *PROPORTIONAL MULTIPLE INTEGRAL OBSERVER* (PMIO) PADA KONTROL *TRACKING* SISTEM PENDULUM KERETA

Nama : Aldhino Putra
Pembimbing : Dr. Trihastuti Agustinah, S.T., M.T.

ABSTRAK

Sistem Pendulum Kereta sebagai sistem nonlinear direpresentasikan ke dalam model *fuzzy* Takagi-Sugeno (T-S). *Proportional Multiple Integral Observer* (PMIO) disusun untuk mengestimasi *state* sistem dan kesalahan sensor berdasarkan model *fuzzy* T-S. Dengan menggunakan analisa kestabilan Lyapunov dan performa H_∞ , PMIO yang dirancang mampu menjamin kestabilan sistem dan juga mampu untuk melemahkan pengaruh turunan ke- q kesalahan sensor pada *error* estimasi *state* sistem augmentasi di bawah level pelemahan yang telah ditentukan. Agar estimasi *state* sistem dan kesalahan sensor mampu diestimasi secara cepat dengan nilai *maximum overshoot* dan *settling time* yang diinginkan, maka *pole* PMIO diletakkan pada daerah D yang berada di sebelah kiri sumbu imajiner menggunakan *LMI region*. Dengan melakukan beberapa pengujian pada implementasi berupa *fault free case*, *bias faults* dan *loss of measurement* pada sensor posisi pendulum, PMIO hasil perancangan mampu mengestimasi kesalahan sensor dan mampu mengembalikan performa sistem ke keadaan nominalnya dengan IAE hasil kompensasi sebesar 0,3047 saat *fault free case*; 0,3339 saat *bias fault* dan 0,4097 saat *loss of measurement*.

Kata Kunci : *Fuzzy* Takagi-Sugeno, Kesalahan Sensor, Kontrol Toleransi Kesalahan, *Linear Matrix Inequality* (LMI), *Proportional Multiple Integral Observer* (PMIO), Sistem Pendulum Kereta



SENSOR FAULT COMPENSATION USING PROPORTIONAL MULTIPLE INTEGRAL OBSERVER (PMIO) FOR TRACKING CONTROL OF THE PENDULUM-CART SYSTEM

Name : Aldhino Putra

Supervisor : Dr. Trihastuti Agustinah, S.T., M.T.

ABSTRACT

The pendulum cart system as a nonlinear system is represented to T-S fuzzy model. Proportional Multiple Integral Observer (PMIO) is designed to estimate state system and sensor fault based on T-S fuzzy model. By using Lyapunov stability analysis and H_∞ performance, the designed PMIO capable to ensure stability of the system and attenuate the effect of the q^{th} derivative of sensor fault on the estimation error below a predetermined attenuation level. In order to state estimation and sensor fault capable to be estimated rapidly with desired maximum overshoot and settling time, the pole of PMIO is placed on the D area that located at the left of the imaginary axis using LMI region. By doing several test such as fault free case, bias fault, and loss of measurement, the designed PMIO is able to estimate sensor fault simultaneously and be able to restore system's performance back to its nominal condition with IAE 0.3047 when fault free case, 0.3339 when bias fault and 0.4097 when loss of measurement.

Keywords : *Fault Tolerant Control (FTC), Linear Matrix Inequality (LMI), Pendulum-Cart System, Proportional Multiple Integral Observer (PMIO), Sensor Fault, Takagi-Sugeno Fuzzy.*



KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT karena atas segala rahmat, taufik, dan hidayah-Nya sehingga Tugas Akhir ini dapat terselesaikan dengan baik. Shalawat dan salam juga penulis sampaikan kepada Rasulullah Muhammad SAW yang telah menjadi teladan bagi penulis.

Tugas Akhir ini disusun untuk memenuhi sebagian persyaratan guna menyelesaikan pendidikan Strata-1 pada Bidang Studi Teknik Sistem Pengaturan, Jurusan Teknik Elektro, Fakultas Teknologi Industri, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya dengan judul:

KOMPENSASI KESALAHAN SENSOR MENGGUNAKAN *PROPORTIONAL MULTIPLE INTEGRAL OBSERVER (PMIO)* PADA KONTROL TRACKING SISTEM PENDULUM KERETA

Pada kesempatan ini penulis menyampaikan terima kasih atas segala bantuan dan dukungannya yang telah diberikan selama proses penyusunan Tugas Akhir ini kepada:

1. Kedua orang tua dan kedua kakak atas dukungan yang telah diberikan baik spiritual maupun material yang tak ternilai harganya.
2. Ibu Dr. Trihastuti, ST., MT. selaku dosen pembimbing yang telah memberikan ilmu dan bimbingannya secara sabar dan penuh perhatian kepada penulis.
3. Teman-teman seperjuangan, Agung, Dahlan, Yoga, Hendro, Muji, Fandri, Ardiansyah, Alif, Fasih, dan Adi yang telah memberikan dukungan dan bantuan dengan ikhlas.

Penulis menyadari bahwa pengerjaan Tugas Akhir ini masih jauh dari sempurna. Kritik dan saran yang membangun akan diterima dengan senang hati. Akhir kata, semoga Tugas Akhir ini dapat memberikan manfaat dalam pengembangan ilmu pengetahuan dan teknologi.

Surabaya, Juli 2015

Penulis

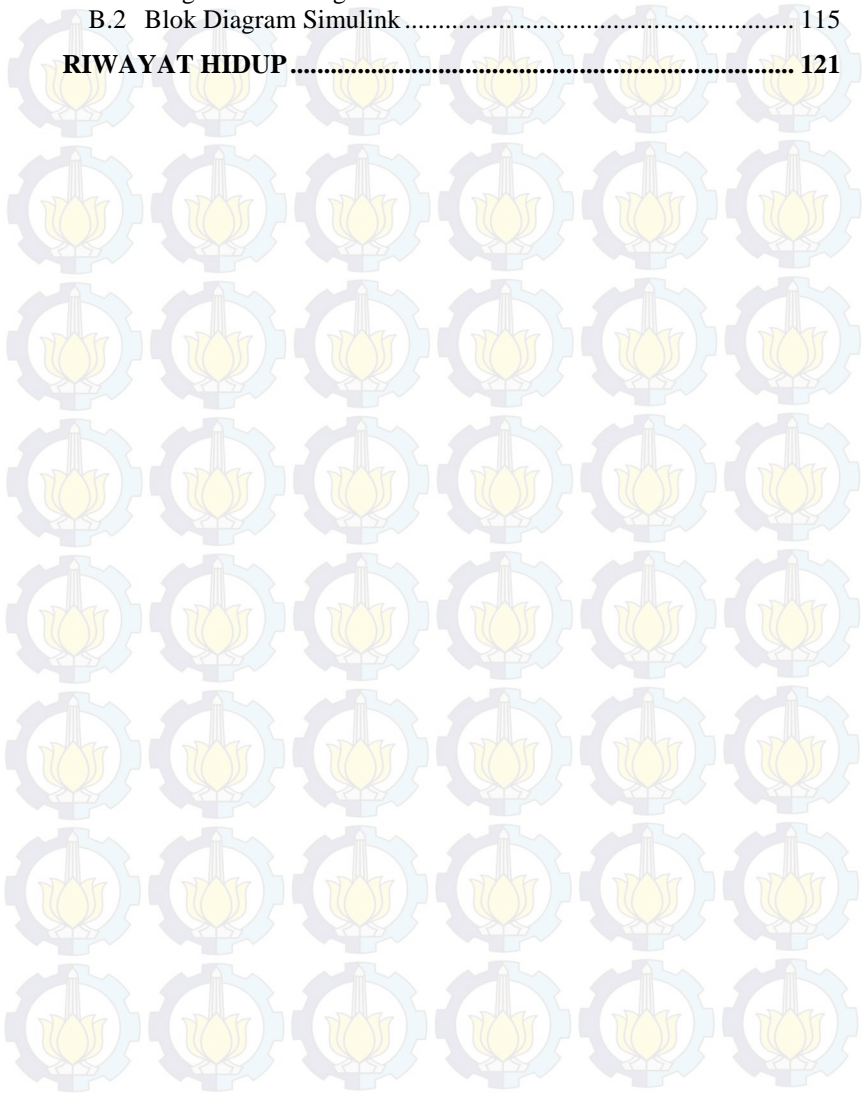


DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
PERNYATAAN KEASLIAN TUGAS AKHIR.....	iii
HALAMAN PENGESAHAN.....	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR.....	xi
DAFTAR ISI.....	xiii
DAFTAR GAMBAR.....	xvii
DAFTAR TABEL	xxi
DAFTAR NOTASI DAN SIMBOL	xxiii
KONVENSI PENULISAN TUGAS AKHIR	xxv
BAB 1 PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Perumusan Masalah	2
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Tujuan Penelitian	3
1.5 Metodologi Penelitian.....	3
1.6 Sistematika Penulisan	4
1.7 Relevansi	5
BAB 2 TEORI PENUNJANG	7
2.1 Tinjauan Pustaka.....	7
2.2 Kontrol Toleransi Kesalahan	8
2.3 Sistem Pendulum Kereta.....	11
2.4 Linearisasi.....	15
2.5 Logika <i>Fuzzy</i>	18
2.5.1 Fungsi Keanggotaan.....	18
2.5.2 Operasi Himpunan <i>Fuzzy</i>	22
2.5.3 Mekanisme Inferensi <i>Fuzzy</i>	23
2.6 Model <i>Fuzzy</i> Takagi-Sugeno	25
2.7 Kontroler <i>State Feedback</i> dengan Kompensator.....	27
2.8 Analisa Kestabilan Lyapunov	28
2.9 <i>Linear Matrix Inequality</i> (LMI).....	30
2.10 <i>Proportional Multiple Integral Observer</i> (PMIO).....	32
2.11 Performa H_{∞}	34
2.12 <i>Pole Placement</i> pada LMI Region	36

2.13 Batasan untuk Optimasi <i>Gain</i>	39
BAB 3 PERANCANGAN SISTEM KONTROL.....	41
3.1 Linearisasi Sistem Pendulum Kereta	41
3.2 Pemodelan <i>Fuzzy</i> Takagi-Sugeno.....	43
3.3 Kompensator	44
3.4 Perancangan Kontroler <i>State Feedback</i> Kompensator <i>Fuzzy T-S</i>	45
3.4.1 <i>Augmented Fuzzy System</i> Kontroler	45
3.4.2 <i>Pole Placement</i> Kontroler pada <i>LMI Region</i>	46
3.4.3 Batasan <i>Gain</i> Kontroler	47
3.4.4 <i>Gain</i> Kontroler Hasil Desain	47
3.5 Perancangan <i>Proportional Multiple Integral Observer</i> (PMIO) <i>Fuzzy T-S</i>	48
3.5.1 <i>Augmented Fuzzy System Observer</i>	49
3.5.2 Kestabilan Lyapunov PMI <i>Observer</i>	50
3.5.3 Performa H_{∞} PMI <i>Observer</i>	52
3.5.4 <i>Pole Placement</i> PMI <i>Observer</i> pada <i>LMI Region</i>	55
3.5.5 <i>Gain</i> PMI <i>Observer</i> Hasil Desain	55
3.6 Diagram Simulink untuk Simulasi dan Implementasi	57
BAB 4 PENGUJIAN DAN ANALISIS DATA	61
4.1 Hasil Simulasi.....	61
4.1.1 Keadaan Nominal (<i>Fault Free Case</i>).....	62
4.1.2 Pengujian <i>Bias Sensor Faults</i> ($\alpha_i = 1$ dan $\beta_i \neq 0$).....	65
4.1.3 Pengujian <i>Loss of Sensitivity</i> ($0 \leq \alpha_i \leq 1$ dan $\beta_i = 0$).....	71
4.1.4 Pengujian <i>Loss of Measurement</i> ($\alpha_i = 0$ dan $\beta_i = 0$).....	75
4.1.5 Pengujian <i>Stuck Sensor Reading</i> ($\alpha_i = 0$ dan $\beta_i \neq 0$).....	78
4.2 Hasil Implementasi.....	81
4.2.1 Keadaan Nominal	82
4.2.2 Pengujian <i>Bias Sensor Faults</i> ($\alpha_i = 1$ dan $\beta_i \neq 0$).....	86
4.2.3 Pengujian <i>Loss of Measurement</i> ($\alpha_i = 0$ dan $\beta_i = 0$).....	89
BAB 5 PENUTUP	93
5.1 Kesimpulan.....	93
5.2 Saran.....	93
DAFTAR PUSTAKA.....	95
LAMPIRAN A	97
A.1 Penurunan Model Matematika Sistem Pendulum Kereta	97
A.2 Elemen Matriks Linearisasi Model Sistem Pendulum Kereta	103

LAMPIRAN B.....	109
B.1 Program Perhitungan <i>Gain</i> Kontroler dan <i>Observer</i>	109
B.2 Blok Diagram Simulink	115
RIWAYAT HIDUP	121





DAFTAR TABEL

Tabel 2.1	Kategori Kesalahan Sensor	11
Tabel 3.1	Parameter Desain Kontroler	48
Tabel 4.1	Perbandingan <i>Eigen Value</i> Sistem dan <i>Observer</i>	61
Tabel 4.2	Karakteristik Respon Sistem Saat Keadaan Nominal	65
Tabel 4.3	Karakteristik Estimasi Kesalahan Bias	67
Tabel 4.4	Perbandingan IAE <i>Tracking</i> Sinyal Referensi	70
Tabel 4.5	Perbandingan Respon Posisi Kereta <i>Faulty</i> dan Kompensasi	73
Tabel 4.6	Karakteristik Sistem <i>Faulty</i> dan Sistem Dengan Kompensasi	78
Tabel 4.7	Karakteristik Respon Sistem Saat Keadaan Nominal	84
Tabel 4.8	Spesifikasi Respon Sistem Saat <i>Fault Free Case</i> dengan Kompensasi	86
Tabel 4.9	Spesifikasi Respon Sistem Saat Terjadi <i>Bias Fault</i>	89
Tabel 4.10	Spesifikasi Respon Sistem Saat Terjadi <i>Loss of Measurement</i>	92
Tabel A.1	Parameter-Parameter Sistem Pendulum Kereta	103



DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Klasifikasi Kesalahan Berdasarkan Waktu Terjadinya ...	9
Gambar 2.2	Pemodelan Kesalahan	9
Gambar 2.3	Komponen Penyusun Sistem Pendulum Kereta	12
Gambar 2.4	Pemodelan Sistem Pendulum Kereta	13
Gambar 2.5	Gaya-Gaya yang Bekerja pada Sistem Pendulum Kereta	13
Gambar 2.6	Fungsi Keanggotaan <i>Triangular</i> dengan $(a, b, c) = (-0,2; 0; 0,2)$	19
Gambar 2.7	Fungsi Keanggotaan <i>Trapezoidal</i> dengan $(a, b, c, d) = (-0,2; -0,1; 0,1; 0,2)$	20
Gambar 2.8	Fungsi Keanggotaan <i>Gaussian</i> dengan $(\mu, \sigma) = (0; 0,08)$	21
Gambar 2.9	Fungsi Keanggotaan <i>Generalized Bell</i> dengan $(a, b, c) = (0,2; 7; 0)$	21
Gambar 2.10	Mekanisme Inferensi <i>Fuzzy</i>	24
Gambar 2.11	Skema <i>Parallel Distributed Compensation</i> (PDC)	27
Gambar 2.12	Kontrol <i>State Feedback Fuzzy T-S</i> dengan Kompensator	28
Gambar 2.13	Struktur <i>Proportional Multiple Integral Observer</i> (PMIO)	33
Gambar 2.14	Konfigurasi Sistem Kontrol <i>Robust</i>	35
Gambar 2.15	<i>Pole Placement</i> pada LMI	36
Gambar 2.16	<i>Half Plane</i> dengan LMI <i>Region</i> di Sebelah Kiri $x = -\gamma o$	38
Gambar 2.17	Kerucut dengan LMI <i>Region</i> Berada di Dalam Kerucut	38
Gambar 2.18	Lingkaran dengan LMI <i>Region</i> Berada di Dalam Lingkaran	38
Gambar 3.1	Fungsi Keanggotaan <i>Plant</i> , Kontroler, dan <i>Observer</i> ...	44
Gambar 3.2	Struktur Kontroler <i>State Feedback</i> Kompensator <i>Fuzzy T-S</i>	48
Gambar 3.3	Struktur PMI <i>Observer Fuzzy T-S</i>	50
Gambar 3.4	Skenario <i>Fault Tolerant Control</i> (FTC) Hasil Perancangan	58
Gambar 3.5	Diagram Simulink untuk Simulasi	58
Gambar 3.6	Diagram Simulink untuk Implementasi	59

Gambar 4.1	Respon Posisi Kereta dengan Berbagai <i>Initial Condition</i> pada Posisi Pendulum	62
Gambar 4.2	Respon Posisi Pendulum dengan Berbagai <i>Initial Condition</i> pada Posisi Pendulum	63
Gambar 4.3	Sinyal Kontrol dengan Berbagai <i>Initial Condition</i> pada Posisi Pendulum	63
Gambar 4.4	Respon Posisi Kereta dengan <i>Initial Condition</i> pada Posisi Pendulum dan Kecepatan Pendulum	64
Gambar 4.5	Respon Posisi Pendulum dengan <i>Initial Condition</i> pada Posisi Pendulum dan Kecepatan Pendulum.....	64
Gambar 4.6	Sinyal Kontrol dengan <i>Initial Condition</i> pada Posisi Pendulum dan Kecepatan Pendulum.....	64
Gambar 4.7	<i>Bias Sensor Fault</i> dan Estimasinya Saat $0 \leq t \leq 1$ detik.....	66
Gambar 4.8	<i>Bias Sensor Fault</i> dan Estimasinya Saat $5 \leq t \leq 30$ detik.....	66
Gambar 4.9	Respon Posisi Kereta <i>Faulty</i> dan Kompensasi	67
Gambar 4.10	Respon Posisi Pendulum <i>Faulty</i> dan Kompensasi	68
Gambar 4.11	Sinyal Kontrol Saat $0 \leq t \leq 5$ detik.....	68
Gambar 4.12	Sinyal Kontrol Saat $5 \leq t \leq 30$ detik.....	68
Gambar 4.13	Sinyal Kontrol Kompensasi dengan <i>Initial Condition</i> $x_2 = 0,2$ rad dan $x_4 = -0,5$ rad/detik Saat $0 \leq t \leq 10$ detik.....	69
Gambar 4.14	Sinyal Kontrol Kompensasi dengan <i>Initial Condition</i> $x_2 = 0,2$ rad dan $x_4 = -0,5$ rad/detik Saat $5 \leq t \leq 30$ detik.....	69
Gambar 4.15	Respon Posisi Kereta dengan Sinyal Kontrol Dibatasi ..	70
Gambar 4.16	Respon Posisi Pendulum dengan Sinyal Kontrol Dibatasi	71
Gambar 4.17	L_2 -Gain Simulasi Saat Terjadi Kesalahan Bias.....	71
Gambar 4.18	Respon Posisi Kereta <i>Faulty</i> dan Kompensasi	73
Gambar 4.19	Respon Posisi Pendulum <i>Faulty</i> dan Kompensasi	73
Gambar 4.20	Sinyal Kontrol <i>Faulty</i> dan Kompensasi	74
Gambar 4.21	Estimasi Kesalahan Sensor	74
Gambar 4.22	L_2 -Gain Saat Terjadi <i>Loss of Sensitivity</i>	74
Gambar 4.23	Perbandingan Respon Posisi Kereta <i>Faulty</i> dengan Respon Posisi Kereta Kompensasi.....	76
Gambar 4.24	Respon Posisi Pendulum Saat <i>Faulty</i> dan Kompensasi ..	76
Gambar 4.25	Estimasi Kesalahan <i>Loss of Measurement</i>	77

Gambar 4.26	Perbandingan Sinyal Kontrol <i>Faulty</i> dan Sinyal Kontrol Kompensasi.....	77
Gambar 4.27	L_2 -Gain Saat Terjadi <i>Loss of Measurement</i>	77
Gambar 4.28	Respon Posisi Kereta <i>Faulty</i> dan Kompensasi.....	79
Gambar 4.29	Respon Posisi Pendulum <i>Faulty</i> dan Kompensasi	80
Gambar 4.30	Sinyal Kontrol <i>Faulty</i>	80
Gambar 4.31	Estimasi Kesalahan Sensor Saat <i>Stuck Sensor Reading</i>	80
Gambar 4.32	L_2 -Gain Simulasi Saat <i>Stuck Sensor Reading</i>	81
Gambar 4.33	Respon Posisi Kereta Saat Keadaan Nominal	83
Gambar 4.34	Respon Posisi Pendulum Saat Nominal	83
Gambar 4.35	Sinyal Kontrol Saat Keadaan Nominal	83
Gambar 4.36	Estimasi Kesalahan Saat <i>Fault Free Case</i>	84
Gambar 4.37	Respon Posisi Kereta dengan Kompensasi	85
Gambar 4.38	Respon Posisi Pendulum dengan Kompensasi	85
Gambar 4.39	Sinyal Kontrol dengan Kompensasi	85
Gambar 4.40	Estimasi <i>Bias fault</i>	87
Gambar 4.41	Respon Posisi Kereta <i>Faulty</i> dan Kompensasi.....	87
Gambar 4.42	Respon Posisi Pendulum Saat <i>Faulty</i> dan Kompensasi	87
Gambar 4.43	Sinyal Kontrol <i>Faulty</i> dan Kompensasi	88
Gambar 4.44	L_2 -Gain Saat Terjadi <i>Bias Fault</i>	88
Gambar 4.45	Estimasi Kesalahan <i>Loss of Measurement</i>	90
Gambar 4.46	Respon Posisi Kereta <i>Faulty</i> dan Kompensasi.....	90
Gambar 4.47	Respon Posisi Pendulum <i>Faulty</i> dan Kompensasi	91
Gambar 4.48	Sinyal Kontrol <i>Faulty</i> dan Kompensasi	91
Gambar 4.49	L_2 -Gain Saat Terjadi <i>Loss of Measurement</i>	91
Gambar A.1	Ilustrasi Pendulum.....	100
Gambar A.2	Ilustrasi Momen Inersia Sistem Pendulum Kereta	100
Gambar A.3	Gaya Gesek T_c Terhadap Kecepatan Kereta x_3	102



DAFTAR NOTASI DAN SIMBOL

\mathbf{x}	Vektor <i>state</i> x
x_n	<i>State</i> ke- n
\dot{x}_n	Turunan pertama <i>state</i> ke- n
\mathbf{x}_c	Vektor <i>state</i> kompensator
f_s	Kesalahan sensor
f_s^q	Turunan ke- q dari kesalahan sensor
α	penurunan sensitivitas sensor
β	kesalahan bias
\mathbf{x}_f	Vektor <i>state faulty</i>
$\bar{\mathbf{x}}$	Vektor <i>state</i> estimasi <i>observer</i>
\in	Anggota himpunan
\notin	Bukan anggota himpunan
\mathbf{I}	Matriks Identitas
\mathbf{A}^T	Transpos matriks \mathbf{A}
\mathbf{A}^{-1}	Invers matriks \mathbf{A}
$\mathbf{A} > 0$	Matriks \mathbf{A} definit positif
$\mathbf{A} < 0$	Matriks \mathbf{A} definit negatif
$\text{diag}(f_1, \dots, f_n)$	Matriks diagonal dengan f_n merupakan elemen diagonal ke- n
γ_{pmi}	Tingkat pelemahan
γ_k	batas <i>pole</i> terbesar kontroler
θ_k	batas sudut <i>pole</i> imajiner kontroler
γ_{obs}	batas <i>pole</i> terbesar <i>observer</i>
θ_{obs}	batas sudut <i>pole</i> imajiner <i>observer</i>
∞	<i>Infinity</i>
$ \mathbf{A} $	Determinan matriks \mathbf{A}
$\ \cdot\ _\infty$	∞ -norm
$\ \cdot\ _2$	L_2 -norm
\sup	Supremum
sgn	Fungsi signum
$\sum(\cdot)$	Penjumlahan dari nilai deret
$\prod(\cdot)$	Perkalian dari nilai deret
$\frac{d}{dx}(\cdot)$	Turunan pertama terhadap x



KONVENSI PENULISAN TUGAS AKHIR

1. Matriks dinyatakan dengan huruf kapital dan tebal. Contoh: **A**, **B**, **C**, **D**.
2. Vektor dinyatakan dengan huruf kecil dan tebal. Contoh: **x**, **y**, **z**.
3. Matriks dengan tanda *tilde* atau *bar* menyatakan matriks yang tersusun atas beberapa matriks lain. Contoh: **\tilde{A}** , **\bar{B}** .
4. Himpunan dinyatakan dengan huruf kapital, miring, dan tidak tebal. Contoh: *X*.
5. Elemen anggota himpunan dinyatakan dengan huruf kecil, miring, dan tidak tebal. Contoh: x_1 , x_2 , x_3 .
6. Variabel bukan matriks ataupun vektor dinyatakan dengan huruf kapital/kecil, miring, dan tidak tebal. Contoh: Gaya (*F*), massa (*m*), dan sebagainya.



RIWAYAT HIDUP



Aldhino Putra lahir di Tulungagung pada tanggal 18 Juli 1993. Penulis merupakan anak ketiga dari pasangan Lang Satriyanto dan Sri Nugroho. Penulis mengenyam bangku pendidikan di SDN 3 Pojok, SMPN 1 Tulungagung, dan SMAN 1 Kauman. Setelah lulus SMA, penulis melanjutkan pendidikannya di Jurusan Teknik Elektro, Fakultas Teknologi Industri, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya melalui jalur SNMPTN tulis pada tahun 2011. Selama menjalani studi di Jurusan Teknik Elektro ini, penulis memilih Teknik Sistem Pengaturan sebagai bidang studi yang ditekuni. Pada bulan Juni 2015, penulis mengikuti seminar dan ujian Tugas Akhir sebagai salah satu persyaratan untuk memperoleh gelar Sarjana Teknik Elektro. Penulis dapat dihubungi pada alamat email aldhinoput@gmail.com.



BAB 1

PENDAHULUAN

Pada bab ini diuraikan mengenai latar belakang permasalahan, penegasan dan alasan pemilihan judul penelitian. Uraian tersebut dibagi ke dalam beberapa subbab diantaranya adalah latar belakang, perumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, metodologi penelitian, sistematika penulisan, dan relevansi.

1.1 Latar Belakang

Suatu sistem kontrol atau proses otomatisasi pada industri membutuhkan performa yang baik untuk meningkatkan kualitas produk. Namun, semakin banyak proses yang dikontrol membuat kemungkinan terjadinya kesalahan sensor maupun aktuator semakin besar. Kesalahan tersebut mengakibatkan sistem tidak stabil, kualitas produk menurun, tingkat keamanan menurun, sistem *shutdown*, serta rugi biaya. Kesalahan sensor maupun aktuator juga dapat terjadi seiring bertambahnya umur sensor dan aktuator itu sendiri. Terjadinya kesalahan pada sensor maupun aktuator dapat diatasi dengan melakukan perbaikan atau penggantian komponen. Namun, hal tersebut memiliki kekurangan, yaitu membutuhkan waktu yang lama serta memiliki resiko yang besar dikarenakan tingkat keamanan sistem menurun. Oleh karena itu diperlukan strategi kontrol yang mampu mengembalikan performa sistem pada performa nominalnya walaupun terjadi kesalahan. Strategi kontrol ini disebut dengan *Fault Tolerant Control* (FTC). Perancangan FTC membutuhkan *fault detection and isolation* (FDI) yang cepat untuk memberikan keputusan yang tepat saat sistem mengalami kesalahan [1].

Selama beberapa dekade terakhir, beberapa penelitian mengenai FTC banyak ditemukan pada jurnal internasional. Pada [2], FTC berbasis model disusun dengan melakukan pendekatan *fuzzy* T-S. Dengan membuat kesalahan sebagai *state* tambahan, maka dapat disusun suatu *augmented fuzzy system* dan disusunlah H_∞ *observer*. *Observer* tersebut mampu untuk mengestimasi *state* sistem dan kesalahan sensor. Namun, skema ini tidak dapat diterapkan pada sistem yang tidak stabil.

FTC dirancang dengan menggunakan sistem deskriptor dengan *Lipschitz constraint*. Pada skema ini bagian linear dan nonlinear dari sistem dipisahkan. Dari pemisahan tersebut dapat dibuat suatu sistem deskriptor. Berdasarkan parameter-parameter pada sistem deskriptor

dirancang suatu *state-space nonlinear estimator*. *State-space nonlinear estimator* akan mendeteksi kesalahan sensor dan menghitung besarnya nilai kesalahan sensor. Skema FTC ini kemudian disimulasikan pada motor DC dengan kontroler *gain state-feedback*. Hasil yang didapat adalah skema tersebut berhasil mendeteksi dan menghitung besarnya nilai kesalahan dari kesalahan sensor. Akan tetapi metode ini tidak dapat diaplikasikan pada sistem yang tidak stabil [3].

Sistem nonlinear didekati menjadi beberapa sistem linear melalui linearisasi. Diasumsikan kesalahan sensor merupakan sinyal yang memiliki dinamika tak tentu sehingga dibutuhkan pengamatan lebih terhadap derivatif dari sinyal kesalahan sensor. Derivatif sinyal kesalahan sensor ke- q dijadikan sebagai *state* tambahan yang nantinya akan disusun suatu sistem augmentasi. *Proportional Multiple Integral Observer* (PMIO) dengan pendekatan *fuzzy T-S* dirancang untuk memberikan estimasi *state* sistem dan kesalahan sensor hingga derivatif ke- q secara simultan. Desain *observer fuzzy T-S* ini mampu diterapkan pada sistem yang tidak stabil. Performa H_∞ juga digunakan untuk membuktikan bahwa *observer* hasil rancangan mampu memberikan nilai *error* estimasi mendekati nol saat $t \rightarrow \infty$. *Linear Matrix Inequality* (LMI) *pole region* digunakan untuk meletakkan *closed loop poles* dari *observer* berada jauh di sebelah kiri sumbu imajiner. Akibatnya PMIO mampu mengestimasi *state* sistem dan kesalahan sensor hingga derivatif ke- q secara simultan [4].

Penerapan FTC pada Sistem Pendulum Kereta dipilih karena Sistem Pendulum Kereta merupakan sistem yang nonlinear dan tidak stabil. Terjadinya kesalahan sensor maupun aktuator pada Sistem Pendulum Kereta dapat menyebabkan posisi pendulum tidak berada pada posisi ekuilibriumnya, posisi kereta tidak sesuai dengan sinyal referensi, dan bahkan membuat sistem menjadi tidak stabil.

Oleh karena itu dalam tugas akhir ini akan dilakukan perancangan FTC dengan kesalahan sensor pada posisi pendulum. Kesalahan sensor diberikan dengan menjumlahkan suatu sinyal pada keluaran sensor sebelum sinyal tersebut diolah oleh kontroler. Kontroler nominal yang digunakan adalah Kontrol *Tracking Fuzzy* dengan menambahkan kompensator [5].

1.2 Perumusan Masalah

Terjadinya kesalahan pengukuran pada sensor dapat berakibat fatal pada Sistem Pendulum Kereta. Hal tersebut mengakibatkan posisi kereta

tidak sesuai dengan sinyal referensi, posisi pendulum tidak berada pada titik ekuilibriumnya, bahkan sistem menjadi tidak stabil. Oleh karena itu, perlu dirancang skenario kontrol yang mampu mengompensasi terjadinya kesalahan sensor, sehingga kestabilan Sistem Pendulum Kereta tetap terjaga pada performa nominalnya.

1.3 Batasan Masalah

Kesalahan sensor yang diberikan dibatasi pada *range* kerja yang dimiliki Sistem Pendulum Kereta yaitu sebesar $-0,4$ s/d $0,4$ m untuk posisi kereta dan $-0,4$ s/d $0,4$ rad untuk posisi pendulum. Hal ini dilakukan untuk menghindari respon posisi kereta dan posisi pendulum menjadi tidak stabil saat implementasi.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari pelaksanaan tugas akhir ini adalah merancang *Proportional Multiple Integral Observer* (PMIO) yang berfungsi untuk mengompensasi kesalahan sensor yang terjadi pada Sistem Pendulum Kereta. Diharapkan pengaruh dari kesalahan sensor dapat dilemahkan, sehingga kestabilan sistem tetap terjaga dan performa sistem tetap berada pada performa nominalnya. Hasil perancangan kemudian diimplementasikan pada *plant* nyata “Digital Pendulum Mechanical Unit 33-200”.

1.5 Metodologi Penelitian

Metodologi yang digunakan dalam menyusun tugas akhir ini diantaranya adalah

1. Studi Literatur

Literatur-literatur yang dipelajari guna menunjang pengerjaan tugas akhir ini diantaranya adalah Kontrol Toleransi Kesalahan, identifikasi *plant*, desain kontrol fuzzy T-S, kontrol *state feedback* dengan kompensator, analisa kestabilan Lyapunov, performa H_{∞} , *Proportional Multiple Integral Observer* (PMIO), *Linear Matrix Inequalities* (LMI), LMI *region*, dan batasan untuk optimasi *Gain*.

2. Pemodelan Sistem

Tahapan dalam memodelkan Sistem Pendulum Kereta ke dalam representasi *state space*.

3. Perancangan Kontroler

Tahapan menghitung nilai *gain* kontroler masing-masing model *fuzzy* T-S berdasarkan analisa kestabilan Lyapunov, *LMI region*, dan batasan untuk optimasi *gain*.

4. Perancangan *Observer*

Tahap menghitung nilai *gain observer* masing-masing model *fuzzy* T-S berdasarkan analisa kestabilan Lyapunov, performa H_∞ , dan *LMI region*.

5. Simulasi dan Implementasi

Hasil pemodelan sistem serta perancangan kontroler dan *observer* disimulasikan pada Simulink. Simulasi dilakukan dengan melakukan pengujian terhadap beberapa skenario kesalahan. Terakhir, implementasi pada *plant* nyata dilakukan.

6. Penulisan dan Penyusunan Buku Tugas Akhir

Keseluruhan pengerjaan tugas akhir ini ditulis ke dalam buku yang berupa laporan ilmiah.

1.6 Sistematika Penulisan

Pembahasan Tugas Akhir ini terdiri atas lima bab, yaitu Pendahuluan, Teori Penunjang, Perancangan Sistem Kontrol, Pengujian dan Analisis Data, serta Penutup

BAB 1

Pendahuluan

Bab ini meliputi latar belakang, perumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, metodologi penelitian, sistematika laporan, dan relevansi.

BAB 2

Teori Penunjang

Bab ini menjelaskan tentang tinjauan pustaka, kontrol toleransi kesalahan, Sistem Pendulum Kereta, linearisasi, logika *fuzzy*, model *fuzzy* T-S, kontroler *state feedback* dengan kompensator, analisa kestabilan Lyapunov, *linear matrix inequality* (LMI), *proportional multiple integral observer* (PMIO), performa H_∞ , *LMI region*, dan batasan *gain* kontroler.

BAB 3

Perancangan Sistem Kontrol

Pada bab ini membahas desain dan perancangan algoritma kontrol untuk kontrol toleransi kesalahan berdasarkan teori penunjang pada Bab 2.

BAB 4

Pengujian dan Analisis Data

Bab ini memuat hasil pengujian simulasi serta analisis data.

BAB 5 Penutup

Bab ini berisi kesimpulan dan saran dari hasil yang telah diperoleh.

1.7 Relevansi

Hasil yang diperoleh dari Tugas Akhir ini diharapkan menjadi referensi perencanaan dalam desain kontrol toleransi kesalahan sensor, pengembangan dan perbandingan metode kontrol toleransi kesalahan yang tepat untuk Sistem Pendulum Kereta di masa mendatang.



BAB 2

TEORI PENUNJANG

Pada bab ini dibahas mengenai teori penunjang yang digunakan dalam menyusun tugas akhir. Teori tersebut meliputi *Fault Tolerant Control* (FTC), Sistem Pendulum Kereta, logika *fuzzy*, analisa kestabilan Lyapunov, dan *Linear Matrix Inequality* (LMI).

2.1 Tinjauan Pustaka

Sistem kontrol sudah tidak asing lagi dalam kehidupan kita. Berbagai peralatan rumah tangga, transportasi, maupun industri menerapkan sistem kontrol untuk memudahkan pekerjaan kita. Namun sistem kontrol dapat bersifat tidak stabil serta membahayakan apabila terjadi kesalahan pada sistem tersebut meliputi kesalahan sensor, kesalahan aktuator, dan kesalahan komponen lain dalam sistem.

Strategi kontrol yang digunakan untuk menanggulangi adanya kesalahan pada sistem kontrol disebut dengan *Fault Tolerant Control* (FTC). FTC diklasifikasikan menjadi dua bagian utama yaitu *Passive Fault Tolerant Control* dan *Active Fault Tolerant Control*. *Passive Fault Tolerant Control* adalah strategi kontrol yang bertujuan untuk merancang kontroler yang tidak terpengaruh apabila terjadi kesalahan. Sedangkan *Active Fault Tolerant Control* adalah strategi kontrol yang berfungsi untuk melakukan desain ulang kontroler atau mengolah kembali data sebelum masuk ke kontroler saat terjadi kesalahan [1].

Sistem nonlinear didekati menjadi beberapa sistem linear melalui linearisasi kemudian pendekatan *fuzzy* T-S digunakan untuk menyusun H_{∞} *observer* yang akan mengestimasi *state* dan kesalahan sensor. Pendekatan sistem deskriptor digunakan untuk menyusun sistem augmentasi dengan kesalahan sensor sebagai vektor *state* tambahan. Namun, metode ini memiliki batasan-batasan yakni tidak dapat diterapkan pada sistem yang tidak stabil [2].

Sistem nonlinear direpresentasikan dalam *state space* dengan konstanta Lipschitz. Kesalahan sensor direpresentasikan sebagai vektor *state* tambahan sehingga dapat disusun sistem augmentasi dengan pendekatan sistem deskriptor. *Proportional Derivative* (PD) *observer* dirancang untuk mampu mengestimasi *state* sistem dan kesalahan sensor secara simultan [3]. Sama seperti [2], metode ini tidak dapat diaplikasikan pada sistem yang tidak stabil.

Sistem nonlinear didekati menjadi beberapa sistem linear melalui linearisasi. Diasumsikan kesalahan sensor merupakan sinyal yang memiliki dinamika tak tentu sehingga dibutuhkan pengamatan lebih terhadap derivatif dari sinyal kesalahan sensor. Derivatif sinyal kesalahan sensor ke- q dijadikan sebagai *state* tambahan yang nantinya akan disusun suatu sistem augmentasi. *Proportional Multiple Integral Observer* (PMI) dengan pendekatan *fuzzy* T-S dirancang untuk memberikan estimasi *state* sistem dan kesalahan sensor hingga derivatif ke- q secara simultan. Desain *observer fuzzy* T-S ini mampu diterapkan pada sistem yang tidak stabil. Analisa kestabilan Lyapunov juga digunakan untuk membuktikan bahwa *observer* hasil rancangan mampu memberikan nilai *error* estimasi mendekati nol saat $t \rightarrow \infty$. *Linear Matrix Inequality* (LMI) *pole region* digunakan untuk meletakkan *closed-loop poles* dari *observer* berada jauh di sebelah kiri sumbu imajiner. Akibatnya PMI *Observer* mampu mengestimasi *state* sistem dan kesalahan sensor hingga derivatif ke- q secara simultan [4].

Permasalahan *tracking* pada Sistem Pendulum Kereta menggunakan model *fuzzy* T-S dengan aturan kontroler disusun berdasarkan konsep *Parallel Distributed Compensation* telah dibahas pada [5]. Sistem kontrol *tracking* yang digunakan adalah kompensator. Kompensator merepresentasikan *state space* dari sinyal referensi yaitu sinyal sinus dengan amplitudo dan frekuensi tertentu. Hasil yang diperoleh yaitu sistem kontrol tersebut mampu memaksa posisi kereta mengikuti sinyal referensi sekaligus mempertahankan kestabilan batang pendulum pada posisi terbalikanya.

Pada tugas akhir ini, perancangan kontrol nominal akan menggunakan desain kontroler yang telah dibahas pada [5]. Perancangan kontrol *tracking* toleransi kesalahan sensor akan menggunakan PMI *Observer* seperti yang telah dibahas pada [4]. Perancangan kontroler menggunakan [5] dan *observer* [4] diaplikasikan pada Sistem Pendulum Kereta yang memiliki sifat nonlinear dan tidak stabil. Diharapkan Sistem Pendulum Kereta tetap mampu mengikuti sinyal referensi dan menjaga kestabilan pendulum pada kondisi terbalikanya walaupun terjadi kesalahan sensor.

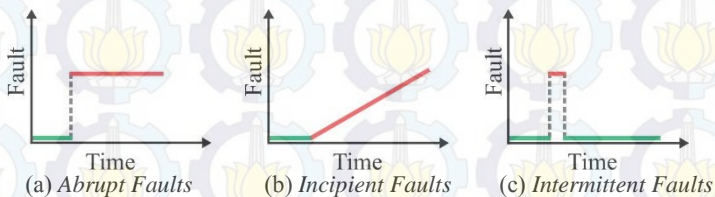
2.2 Kontrol Toleransi Kesalahan [1]

Kesalahan (*fault*) dalam sistem kontrol diartikan sebagai penyimpangan karakteristik atau parameter sistem dari kondisi nominalnya. Kesalahan pada umumnya sulit untuk diperkirakan maupun

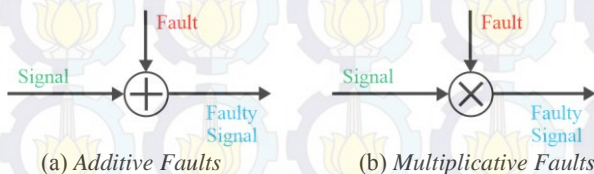
dicegah. Kesalahan yang terakumulasi dapat menyebabkan terjadinya kegagalan yang juga menjadi pemicu sistem menjadi tidak stabil serta menurunnya tingkat keamanan.

Kesalahan dapat diklasifikasikan berdasarkan waktu terjadinya yaitu *abrupt faults*, *incipient faults*, dan *intermittent faults*. *Abrupt faults* yaitu kesalahan yang memiliki dinamika lebih cepat daripada dinamika sistem. Akibat yang terjadi dari kesalahan ini biasanya adalah kerusakan *hardware*. Oleh karenanya, dibutuhkan deteksi kesalahan yang cepat untuk mengatasi kesalahan ini. *Incipient faults* adalah kesalahan yang memiliki perubahan nilai lambat terhadap waktu. Kesalahan ini biasanya timbul karena umur dari sensor, aktuator, atau sistem yang sudah tua. *Intermittent faults* adalah kesalahan yang muncul dan menghilang dengan cepat. Ilustrasi kesalahan berdasarkan waktu terjadinya dapat dilihat pada Gambar 2.1.

Pemodelan kesalahan dalam sistem kontrol dinyatakan dengan *additive faults* dan *multiplicative faults*. *Additive faults* mempengaruhi sistem dengan menambahkan sebuah sinyal kesalahan pada sinyal. Sementara *multiplicative faults* mempengaruhi sistem dengan mengalikan sebuah sinyal kesalahan ke dalam sinyal. Pemodelan kesalahan dapat dilihat pada Gambar 2.2.



Gambar 2.1 Klasifikasi Kesalahan Berdasarkan Waktu Terjadinya [1]



Gambar 2.2 Pemodelan Kesalahan [1]

Berdasarkan letak terjadinya, kesalahan dapat dibedakan menjadi tiga, yaitu kesalahan aktuator, kesalahan sistem/komponen, dan kesalahan sensor. Kesalahan aktuator didefinisikan sebagai tidak berfungsinya peralatan yang berfungsi untuk mengaktuatori/menggerakkan sistem. Contohnya adalah tidak berfungsinya aktuator elektromekanik pada mesin diesel. Kesalahan sistem/komponen didefinisikan sebagai perubahan parameter fisik sistem, seperti massa, koefisien aerodinamik, kondisi operasi, dan lain sebagainya. Kesalahan sensor didefinisikan sebagai pembacaan atau pengukuran yang salah terhadap pengukuran suatu proses.

Sistem yang sudah mengandung kesalahan sensor disebut sebagai *faulty system* yang dapat dituliskan dengan (2.2) dan (2.3), sedangkan sistem yang belum mengandung kesalahan sensor dituliskan pada (2.1):

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{y}_f = \mathbf{C}_f\mathbf{x} \quad (2.2)$$

$$\mathbf{y}_f = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}_f\mathbf{f}_s \quad (2.3)$$

dengan $\mathbf{y}_f \in \mathcal{R}^l$, $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$, dan $\mathbf{f}_s \in \mathcal{R}^k$ secara berturut-turut adalah keluaran sistem yang telah mengandung kesalahan sensor, *state* sistem, dan kesalahan sensor. Matriks \mathbf{C}_f adalah matriks output yang telah mengandung kesalahan sensor, \mathbf{C} adalah matriks output dan \mathbf{D}_f adalah matriks yang menghubungkan kesalahan sensor dengan output sistem. Matriks \mathbf{C}_f , \mathbf{C} dan \mathbf{D}_f memiliki dimensi yang bersesuaian.

Dimisalkan suatu keluaran sistem dituliskan dengan:

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Skenario kesalahan sensor berdasarkan (2.2)-(2.4) dapat dibagi menjadi beberapa kategori yang dituliskan dalam Tabel 2.1. Bentuk umum kesalahan sensor dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\mathbf{y}_f = \begin{bmatrix} y_{f1} \\ y_{f2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 x_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 x_2 + \beta_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 - 1 + \beta_1/x_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 - 1 + \beta_2/x_2 \end{bmatrix} x_2$$

$$\mathbf{y}_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\alpha_1 - 1)x_1 + \beta_1 \\ (\alpha_2 - 1)x_2 + \beta_2 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

dengan $f_{s_i} = (\alpha_i - 1)x_i + \beta_i$.

2.3 Sistem Pendulum Kereta [6]

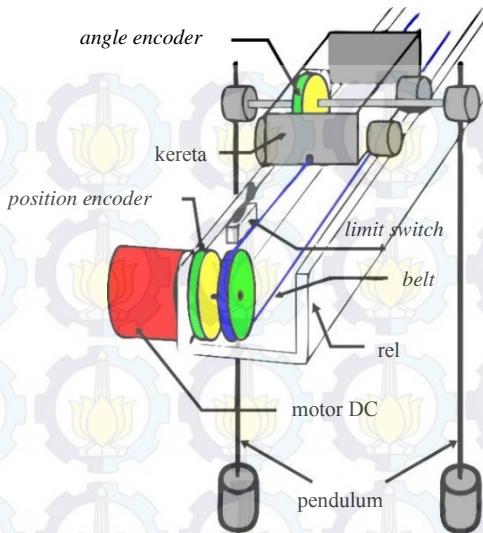
Sistem Pendulum Kereta merupakan sistem yang bersifat nonlinear dan tidak stabil. Sistem Pendulum Kereta bersifat nonlinear karena memiliki banyak titik ekuilibrium, sedangkan bersifat tidak stabil karena adanya pengaruh percepatan gravitasi saat mempertahankan batang pendulum pada posisi terbaliknnya.

Sistem Pendulum Kereta yang digunakan dalam Tugas Akhir ini adalah “Digital Pendulum Mechanical Unit 33-200” dari Feedback Instrument Ltd. Model fisik dari Sistem Pendulum Kereta tersebut terdiri atas sepasang batang pendulum yang terpasang pada sebuah kereta. Batang pendulum tersebut mampu berayun bebas 360° akibat pergerakan kereta pada lintasan rel. Sementara gerakan kereta digerakkan oleh motor dc yang dihubungkan dengan *belt*.

Lintasan rel memiliki panjang yang terbatas. Sebagai sistem pengaman maka diberikan *limit switch* pada ujung-ujung lintasan untuk mematikan motor dc secara otomatis apabila kereta bergerak melebihi posisi dari *limit switch*. Posisi kereta terhadap titik tengah lintasan kereta diukur oleh *position encoder*. Sudut batang pendulum diukur berlawanan arah jarum jam terhadap sumbu vertikal dan diukur menggunakan *angle encoder*. Komponen penyusun Sistem Pendulum Kereta tertera pada Gambar 2.3.

Tabel 2.1 Kategori Kesalahan Sensor [1]

	$\beta_i = 0$	$\beta_i \neq 0$
$\alpha_i = 1$	<i>Fault-free case</i>	<i>Bias</i>
$0 < \alpha_i < 1$	<i>Loss of sensitivity</i>	<i>Loss of sensitivity</i>
$\alpha_i = 0$	<i>Loss of measurement</i>	<i>Stuck sensor reading</i>
$\alpha_i = f(t)$	<i>Time varying parametric fault</i>	<i>Time varying parametric fault with bias</i>



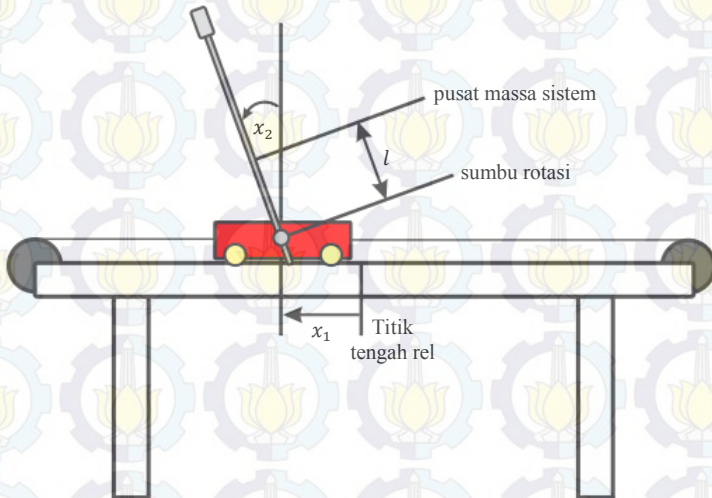
Gambar 2.3 Komponen Penyusun Sistem Pendulum Kereta [6]

Untuk menerapkan algoritma algoritma kontrol pada Sistem Pendulum Kereta digunakan perangkat lunak MATLAB dan Simulink. MATLAB berfungsi sebagai *tools* untuk menyelesaikan permasalahan matematika yang dapat digunakan untuk mencari nilai *gain* kontroler maupun *gain observer*. Sedangkan Simulink berfungsi untuk memodelkan sistem kontrol yang akan didesain. Jembatan antara perangkat lunak MATLAB dan Simulink dengan Sistem Pendulum Kereta adalah “Digital Pendulum Controller 33-201” yaitu kontroler antar muka serta board akuisisi data (DAQ) yang berfungsi sebagai I/O pada komputer.

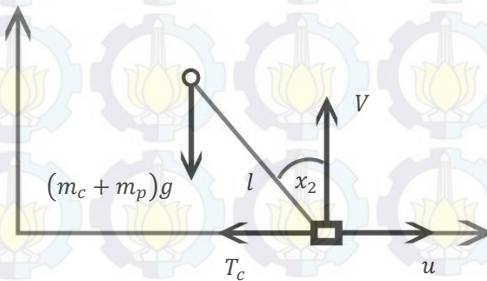
Sistem Pendulum Kereta terdiri dari empat *state*, yaitu x_1 , x_2 , x_3 dan x_4 dan satu sinyal kontrol u dengan:

- x_1 : posisi kereta diukur dari titik tengah rel (m)
- x_2 : sudut pendulum diukur terhadap garis vertikal dan titik pusat massa sistem, diukur berlawanan arah jarum jam ($x_2 = 0$ pendulum pada posisi terbaliknya) (rad)
- x_3 : kecepatan kereta (m/s)
- x_4 : kecepatan pendulum (rad/s)

Sinyal kontrol u adalah gaya dorong yang diberikan pada kereta. Gaya dorong ini memiliki hubungan paralel dengan rel. Massa kereta dinotasikan dengan m_c , massa pendulum dengan m_p , dan l adalah jarak dari sumbu putar pendulum ke pusat massa sistem, serta J adalah momen inersia Sistem Pendulum Kereta terhadap pusat massa sistem. Pemodelan Sistem Pendulum Kereta dan gaya-gaya yang berkerja pada Sistem Pendulum Kereta secara berturut-turut ditunjukkan pada Gambar 2.4 dan Gambar 2.5



Gambar 2.4 Pemodelan Sistem Pendulum Kereta



Gambar 2.5 Gaya-Gaya yang Bekerja pada Sistem Pendulum Kereta [6]

Model matematika Sistem Pendulum Kereta didapatkan melalui identifikasi fisik dengan menggunakan hukum fisika (Newton). Hukum Newton II digunakan untuk menganalisa gaya-gaya yang berkerja pada sumbu horizontal, sumbu vertikal, dan torsi yang berkerja saat pendulum berotasi. Adapun gaya-gaya tersebut seperti pada (2.6)-(2.8):

$$\sum F_x = ma_x$$

$$u - T_c = (m_c + m_p)(x_1 - l \sin x_2)'' \quad (2.6)$$

$$\sum F_y = ma_y$$

$$V - (m_c + m_p)g = (m_c + m_p)(l \cos x_2)'' \quad (2.7)$$

$$\sum \tau = I\alpha$$

$$(u - T_c)l \cos x_2 + Vl \sin x_2 - D_p = J(x_2)''$$

$$D_p = f_p x_4 \quad (2.8)$$

dengan T_c adalah gaya gesek dinamis yang besarnya bergantung pada nilai x_3 (kecepatan kereta), V adalah gaya normal sistem terhadap bidang horizontal, D_p adalah momen gesek akibat rotasi pendulum yang besarnya bergantung pada nilai x_4 (kecepatan pendulum) dan f_p adalah konstanta gesek pendulum. Parameter-parameter Sistem Pendulum Kereta secara lengkap akan dijelaskan pada Lampiran A.1. Dengan mengeliminasi V pada (2.7) dan (2.8) serta sedikit perhitungan matematis sederhana, didapatkan persamaan *state* Sistem Pendulum Kereta (untuk $t \geq 0$, $a = l^2 + J/(m_c + m_p)$ dan $\mu = (m_c + m_p)l$) yang dituliskan pada (2.9):

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \\ \dot{x}_3 &= \frac{a(u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2) + l \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{J + \mu l \sin^2 x_2} \\ \dot{x}_4 &= \frac{l \cos x_2 (u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2) + \mu g \sin x_2 - f_p x_4}{J + \mu l \sin^2 x_2} \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

2.4 Linearisasi [7]

Sistem dikatakan nonlinear apabila prinsip superposisi dan *scaling* pada sistem linear tidak bisa diterapkan. Meskipun kebanyakan sistem fisik dapat direpresentasikan dengan persamaan linear, namun dalam kenyataannya sistem tersebut tidak selalu linear. Representasi persamaan linear memiliki range kerja yang terbatas. Apabila melebihi range kerja tersebut maka sistem akan menjadi nonlinear. Misalnya saja suatu *damper* akan bersifat linear saat dioperasikan pada kecepatan rendah, namun akan bersifat nonlinear saat dioperasikan pada kecepatan tinggi.

Nonlinearitas sendiri dapat dibedakan menjadi dua, yaitu *inherent* (*natural*) dan *intentional* (*artificial*). Nonlinearitas *inherent* merupakan sifat nonlinear yang muncul akibat aktivitas gerak dari sistem, seperti gaya gesek, saturasi, dan histerisis. Sedangkan nonlinearitas *intentional* adalah sifat nonlinear yang dimunculkan secara sengaja. Prosedur untuk menemukan solusi suatu permasalahan yang mengandung sistem nonlinear secara matematis pada umumnya sangat sulit dan memakan waktu yang lama. Linearisasi merupakan metode yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan yang mengandung nonlinearitas dengan melakukan pendekatan sistem linear pada beberapa daerah kerja terbatas. Metode ini dirasa lebih mudah daripada harus menyelesaikan persoalan nonlinear secara matematis. Jadi, analisa kestabilan Lyapunov, *pole placement* dan teori-teori lainnya pada sistem linear dapat diterapkan sehingga memudahkan proses desain.

Dalam teori kontrol klasik, sistem dapat direpresentasikan ke dalam bentuk fungsi alih dan persamaan diferensial. Representasi sistem dalam bentuk persamaan diferensial dapat ditulis dengan (2.10) dan persamaan aljabar keluaran sistem dapat ditulis dengan (2.11):

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= h_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\ y_2 &= h_2(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\ &\vdots \\ y_p &= h_p(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Apabila vektor kolom $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$ disebut sebagai *state* sistem, vektor kolom $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_m]^T$ disebut sebagai sinyal kontrol dan vektor kolom $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_p]^T$ disebut sebagai keluaran sistem, maka (2.10) dapat dituliskan menjadi (2.12) dan (2.11) menjadi (2.13):

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\ f_2(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} h_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\ h_2(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\ \vdots \\ h_p(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

sehingga dapat ditulis:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \end{cases} \quad (2.14)$$

Apabila (2.14) merupakan suatu sistem linear, maka sistem tersebut dapat ditulis dalam representasi *state space*:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}_t\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases} \quad (2.15)$$

dengan $\mathbf{A} \in \mathcal{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathcal{R}^{n \times m}$, $\mathbf{C}_t \in \mathcal{R}^{p \times n}$, dan $\mathbf{D} \in \mathcal{R}^{p \times m}$.

Suatu sistem nonlinear dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.16)$$

dimana $y = f(x)$ adalah suatu kurva nonlinear. Garis singgung pada titik $(x^*, f(x^*))$ merepresentasikan pendekatan linear $f(x)$ di sekitar titik x^* sehingga linearisasi (2.16) di sekitar titik x^* dapat dituliskan

$$\delta y = f(\delta x) = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x^*} \delta x \quad (2.17)$$

dengan $\delta y = f(x) - f(x^*)$ dan $\delta x = x - x^*$. Apabila titik kerja sistem berada pada origin (0,0), maka:

$$\begin{aligned} \delta y &= f(x) - f(x^*) \\ \delta y &= f(x) - 0 \\ \delta y &= f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta x &= x - x^* \\ \delta x &= x - 0 \\ \delta x &= x \end{aligned}$$

$$y = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x^*} x \quad (2.18)$$

Apabila \mathbf{f} dan \mathbf{h} pada (2.14) merupakan fungsi nonlinear dari \mathbf{x} dan \mathbf{u} serta diberikan sebuah titik operasi dengan $\mathbf{x}^* = [x_1^*, \dots, x_n^*]^T$ merupakan titik operasi yang didapatkan saat $\mathbf{u}^* = [u_1^*, \dots, u_m^*]^T$, maka hasil linearisasi lokal (2.14) berdasarkan (2.18) dapat dituliskan dengan (2.19)-(2.22) sebagai berikut:

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_n} \end{array} \right]_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} \quad (2.19)$$

$$\mathbf{B} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_m} \end{array} \right]_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} \quad (2.20)$$

$$C = \frac{\partial h(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial h_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_n(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_n(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_n} \end{array} \right] \Big|_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} \quad (2.21)$$

$$D = \frac{\partial h(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial h_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial h_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_n(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial h_n(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_m} \end{array} \right] \Big|_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} \quad (2.22)$$

2.5 Logika Fuzzy [8]

Logika *fuzzy* merupakan konsep logika yang mengikuti cara berpikir manusia dalam merepresentasikan suatu nilai, permasalahan, ataupun pernyataan. Tidak seperti logika Boolean yang hanya memiliki dua nilai (0/1, Benar/Salah, atau Ya/Tidak), logika *fuzzy* memiliki nilai yang mampu merepresentasikan ketidakpastian atau persepsi yang berbeda terhadap suatu kejadian yang sama. Misalnya, menurut orang Indonesia tinggi badan 165 cm itu tergolong “tinggi”, namun menurut orang Eropa itu tergolong “sedang”, sementara menurut pemain basket NBA itu tergolong “rendah”. Tinggi badan disebut variabel premis sementara pernyataan “tinggi”, “sedang”, dan “rendah” terhadap tinggi badan manusia disebut sebagai himpunan *fuzzy*. Setiap variabel premis memiliki derajat keanggotaan terhadap setiap fungsi keanggotaan. Selanjutnya akan dibahas mengenai fungsi keanggotaan *fuzzy*, operasi himpunan *fuzzy*, dan mekanisme inferensi *fuzzy* yang digunakan dalam desain sistem kontrol *fuzzy*.

2.5.1 Fungsi Keanggotaan

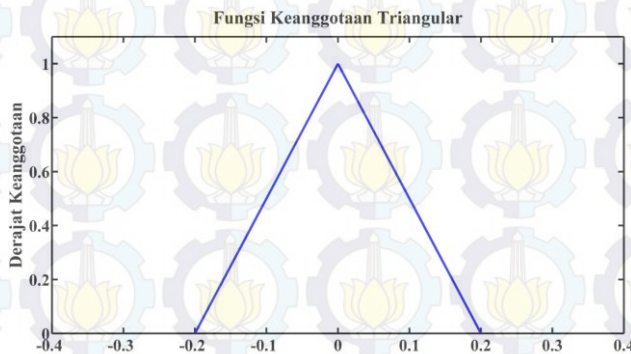
Dimisalkan x adalah suatu variabel premis, M adalah himpunan *fuzzy*, dan $\mu_m(x)$ adalah fungsi keanggotaan. Pengertian fungsi keanggotaan adalah fungsi yang memetakan variabel premis x ke dalam suatu nilai $[0,1]$ dari suatu himpunan *fuzzy* M . Nilai pemetaan variabel premis ke dalam suatu fungsi keanggotaan disebut sebagai nilai derajat keanggotaan. Macam-macam fungsi keanggotaan diantaranya adalah fungsi keanggotaan *Triangular*, *Trapezoidal*, *Gaussian*, *Generalized bell*,

Sigmoid, *Z-shape*, dan *S-shape*. Fungsi keanggotaan tersebut memiliki beberapa parameter yang digunakan untuk menentukan bentuk dari fungsi keanggotaan itu sendiri.

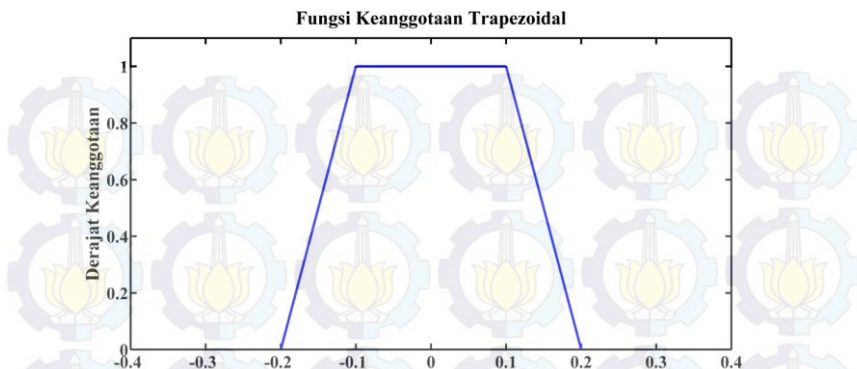
Fungsi keanggotaan *Triangular* memiliki bentuk segitiga dan terdiri dari tiga parameter yang digunakan untuk menentukan kemiringan kurva. Notasi matematika dari fungsi keanggotaan *Triangular* adalah ditunjukkan pada (2.23) dan plot fungsi keanggotaan *Triangular* ditunjukkan pada Gambar 2.6:

$$\mu_{\text{triangular}}(x; a, b, c) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b} & b \leq x \leq c \\ 0 & c \leq x \end{cases} \quad (2.23)$$

Fungsi keanggotaan *Trapezoidal* memiliki bentuk trapesium. Dalam fungsi keanggotaan *Triangular* terdapat tiga parameter yang mempengaruhi bentuk kurva, namun dalam fungsi keanggotaan *Trapezoidal* terdapat empat parameter yang mempengaruhi bentuk kurva. Keempat parameter tersebut mempengaruhi kemiringan kurva dan lebar kurva yang memiliki derajat keanggotaan bernilai 1. Notasi matematika dari fungsi keanggotaan *Trapezoidal* adalah ditunjukkan pada (2.24) dan bentuk plot fungsi keanggotaan *Trapezoidal* ditunjukkan pada Gambar 2.7:



Gambar 2.6 Fungsi Keanggotaan *Triangular* dengan $(a, b, c) = (-0,2; 0; 0,2)$



Gambar 2.7 Fungsi Keanggotaan Trapezoidal dengan $(a, b, c, d) = (-0,2; -0,1; 0,1; 0,2)$

$$\mu_{\text{trapezoidal}}(x: a, b, c, d) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x - a}{b - a} & a \leq x \leq b \\ 1 & b \leq x \leq c \\ \frac{d - x}{d - c} & c \leq x \leq d \\ 0 & d \leq x \end{cases} \quad (2.24)$$

Fungsi keanggotaan berikutnya yaitu fungsi keanggotaan *Gaussian*. Bentuk fungsi keanggotaan *Gaussian* berbeda dari bentuk fungsi keanggotaan sebelumnya karena tidak tersusun atas garis lurus. Bentuk fungsi keanggotaan *Gaussian* ditentukan oleh dua parameter yaitu μ dan σ yang fungsinya secara berturut-turut sebagai titik tengah kurva dan lebar kurva. Notasi matematika dari fungsi keanggotaan *Gaussian* ditunjukkan pada (2.25):

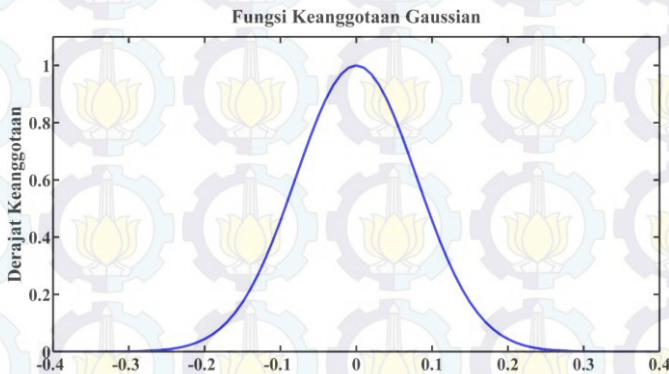
$$\mu_{\text{gaussian}}(x: \mu, \sigma) = \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.25)$$

Plot fungsi keanggotaan *Gaussian* ditunjukkan pada Gambar 2.8

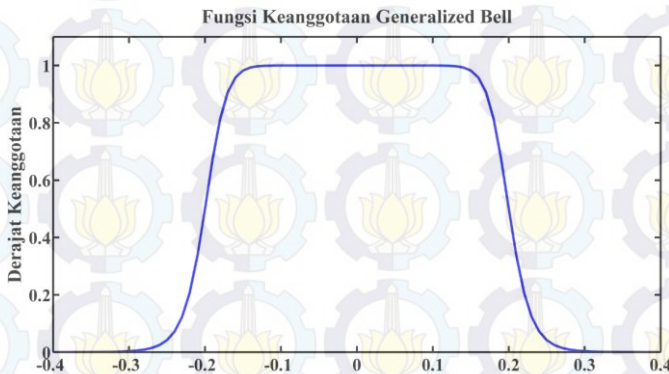
Fungsi keanggotaan *Generalized Bell* memiliki tiga parameter yang mempengaruhi letak dan bentuk fungsi. Tiga parameter tersebut diantaranya adalah (a, b, c) yang secara berturut-turut menentukan

panjang kurva yang memiliki nilai derajat keanggotaan satu, menentukan *smooth* atau tidaknya saat terjadi peralihan nilai derajat keanggotaan dari satu ke nol atau sebaliknya, dan juga menentukan titik tengah kurva. Notasi matematika dari fungsi keanggotaan *Generalized Bell* ditunjukkan pada (2.26) dan plot fungsinya ditunjukkan pada Gambar 2.9:

$$\mu_{generalized\ bell}(x; a, b, c) = \frac{1}{1 + \left| \frac{x - c}{a} \right|^{2b}} \quad (2.26)$$



Gambar 2.8 Fungsi Keanggotaan *Gaussian* dengan $(\mu, \sigma) = (0; 0,08)$



Gambar 2.9 Fungsi Keanggotaan *Generalized Bell* dengan $(a, b, c) = (0,2; 7; 0)$

2.5.2 Operasi Himpunan Fuzzy

Sama seperti operasi himpunan pada teori himpunan, operasi tersebut dapat diterapkan pada himpunan fuzzy. Operasi tersebut dilakukan dengan tujuan agar memperoleh himpunan fuzzy baru yang akan digunakan dalam mekanisme inferensi fuzzy. Dimisalkan terdapat himpunan fuzzy M_1 dan M_2 dengan fungsi keanggotaan secara berturut-turut $\mu_{m1}(x)$ dan $\mu_{m2}(x)$ serta semesta pembicaraan X . Operasi himpunan yang dapat dilakukan dari himpunan fuzzy tersebut diantaranya:

1. Komplemen (NOT)

Operasi komplemen dari himpunan fuzzy M_1 dinyatakan sebagai berikut:

$$\mu_{m1}'(x) = 1 - \mu_{m1}(x) \quad (2.27)$$

2. Intersection (AND)

Operasi *intersection* dari himpunan fuzzy M_1 dan M_2 dinyatakan dengan dua cara:

- *Minimum*

Definisi *minimum* dari *intersection* himpunan fuzzy M_1 dan M_2 adalah

$$\mu_{m1 \cap m2} = \min(\mu_{m1}(x), \mu_{m2}(x) : x \in X) \quad (2.28)$$

- *Algebraic Product*

Definisi *algebraic product* dari *intersection* himpunan fuzzy M_1 dan M_2 adalah

$$\mu_{m1 \cap m2} = (\mu_{m1}(x) \mu_{m2}(x) : x \in X) \quad (2.29)$$

3. Union (OR)

Operasi *union* dari himpunan fuzzy M_1 dan M_2 dinyatakan dengan dua cara:

- *Maximum*

Definisi *maximum* dari *union* himpunan fuzzy M_1 dan M_2 adalah

$$\mu_{m1 \cup m2} = \max(\mu_{m1}(x), \mu_{m2}(x) : x \in X) \quad (2.30)$$

- *Algebraic Sum*

Definisi *algebraic sum* dari *union* himpunan fuzzy M_1 dan M_2 adalah

$$\mu_{m1 \cup m2} = (\mu_{m1}(x) + \mu_{m2}(x) - \mu_{m1}(x)\mu_{m2}(x) : x \in X) \quad (2.31)$$

2.5.3 Mekanisme Inferensi Fuzzy

Inferensi *fuzzy* merupakan proses mengambil keputusan/konklusi dari aturan yang ada. Pengambilan aturan ini berdasarkan logika/penalaran manusia, misal:

Pengetahuan : *If* kecepatan mobil adalah sangat pelan
Then injak pedal gas lebih dalam
Fakta : Kecepatan mobil sangat pelan
Konklusi : Injak pedal gas lebih dalam

Secara umum inferensi *fuzzy* dapat dituliskan dengan (2.32):

If premis **Then** konsekuen
If x is A **Then** y is B (2.32)

dengan A dan B merupakan nilai linguistik dengan derajat keanggotaan 1 yang didefinisikan oleh himpunan *fuzzy* dari variabel linguistik x dan y . Untuk masukan *fuzzy* lebih dari satu, maka pada bagian premis diperlukan suatu operator *OR* atau *AND* untuk menghubungkan masukan *fuzzy* satu dengan masukan lainnya:

If premis **Then** konsekuen
If x_1 is A_1 *AND* x_2 is A_2 *AND* ... *AND* x_n is A_n **Then** y is B (2.33)

dengan A_1 , A_2 , A_3 , dan B adalah variabel linguistik yang didefinisikan dengan himpunan *fuzzy*. Mekanisme inferensi *fuzzy* terdiri dari lima langkah sebagai berikut (Gambar 2.10):

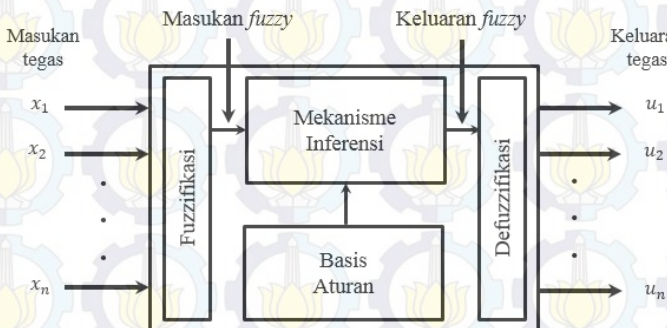
1. Fuzzifikasi masukan
 Mengubah masukan tegas menjadi masukan *fuzzy*. Masukan *fuzzy* didapatkan dari masukan tegas yang telah dipetakan ke dalam nilai 0 sampai dengan 1 oleh fungsi keanggotaan untuk semua himpunan *fuzzy*.

2. Aplikasi operator *fuzzy*
Penerapan operator *fuzzy* (*AND* atau *OR*) pada tiap premis dari aturan *fuzzy*.
3. Aplikasi metode implikasi
Proses mendapatkan konsekuen dengan menerapkan *minimum* atau *algebraic product* untuk operasi *AND* dan menerapkan *maximum* atau *algebraic sum* untuk operasi *OR* pada tiap aturan.
4. Agregasi semua keluaran
Penggabungan semua hasil implikasi *fuzzy* dari tiap aturan untuk menghasilkan keluaran/konklusi *fuzzy*.
5. Defuzzifikasi
Perhitungan keluaran/konklusi *fuzzy* menjadi keluaran tegas.

Metode yang sering digunakan dalam proses defuzzifikasi keluaran *fuzzy* menjadi keluaran tegas adalah *center of gravity* dan *center (weighted) average*. Metode *center of gravity* dapat digunakan apabila fungsi keanggotaan simetris. Keluaran tegas yang dihasilkan oleh metode *center of gravity* dapat dituliskan pada (2.34)

$$y^{tegas} = \frac{\sum_{i=1}^r b_i \int \mu_i(y)}{\sum_{i=1}^r \int \mu_i(y)} \quad (2.34)$$

dengan r adalah banyaknya aturan, b_i adalah titik tengah dari fungsi keanggotaan dan $\int \mu_i(y)$ adalah luas daerah konsekuensi tiap-tiap aturan.



Gambar 2.10 Mekanisme Inferensi *Fuzzy* [8]

Metode *center (weighted) average* merupakan rata-rata berbobot dari nilai tengah fungsi keanggotaan keluaran. Sama dengan *center of gravity*, metode *center (weighted) average* dapat digunakan apabila fungsi keanggotaan simetris. Keluaran tegas yang dihasilkan oleh metode *center (weighted) average* dapat dituliskan pada (2.35)

$$y^{tegas} = \frac{\sum_{i=1}^r b_i \mu_i}{\sum_{i=1}^r \mu_i} \quad (2.35)$$

dengan r adalah banyaknya aturan, b_i adalah titik tengah dari fungsi keanggotaan dan μ_i adalah nilai bobot tiap-tiap aturan.

2.6 Model Fuzzy Takagi-Sugeno [8]

Model fuzzy Takagi-Sugeno (T-S) merupakan pemodelan fuzzy berbasis model yang digunakan untuk mengontrol *plant* (sistem) nonlinear. Sistem nonlinear direpresentasikan ke dalam beberapa model sistem linear dengan daerah kerja berbeda serta dibobotkan berdasarkan nilai derajat keanggotaannya. Oleh karena itu, analisis kestabilan sistem kontrol fuzzy dapat dilakukan. Model fuzzy T-S terdiri dari dua aturan *If-Then* yaitu aturan *plant* dan aturan kontroler yang dapat dinyatakan dengan (2.36) dan (2.40):

Aturan *plant* ke- i

If z_1 is M_{i1} and z_2 is M_{i2} ... and z_j is M_{ig}

Then $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_i \mathbf{x} + \mathbf{B}_i \mathbf{u}$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_{ti} \mathbf{x} + \mathbf{D}_i \mathbf{u} \quad ; i = 1, 2, \dots, r \quad (2.36)$$

dengan $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathcal{R}^m$, $\mathbf{y} \in \mathcal{R}^l$, r adalah jumlah aturan fuzzy dan g adalah jumlah himpunan fuzzy dalam satu aturan, M_{ig} adalah himpunan fuzzy, dan z adalah variabel premis yang dapat berupa variabel *state* sistem. Matriks \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C}_t , dan \mathbf{D} adalah matriks konstan yang dimensinya bersesuaian.

Mekanisme inferensi fuzzy yang digunakan pada (2.36) menggunakan operator *AND (algebraic product)* dan metode defuzzifikasi yang digunakan adalah *center (weighted) average*. Bentuk keseluruhan model fuzzy T-S pada (2.36) dapat dinyatakan ke dalam (2.37):

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \sum_{i=1}^r m_i(z) [\mathbf{A}_i \mathbf{x} + \mathbf{B}_i \mathbf{u}] \\ \mathbf{y} &= \sum_{i=1}^r m_i(z) [\mathbf{C}_i \mathbf{x} + \mathbf{D}_i \mathbf{u}] \end{aligned} \right\} \quad (2.37)$$

dengan

$$m_i(z) = \frac{\mu_i(z)}{\sum_{i=1}^r \mu_i(z)}; \mu_i(z) = \prod_{j=1}^p M_{ij}(z_j) \quad (2.38)$$

Pembobot $m_i(z)$ dan derajat keanggotaan $\mu_i(z)$ memiliki sifat sebagai berikut:

$$m_i(z) \geq 0; \sum_{i=1}^r m_i(z) = 1; \mu_i(z) \geq 0; \sum_{i=1}^r \mu_i(z) > 0 \quad (2.39)$$

Dari aturan *plant* yang ada dapat disusun aturan kontroler *state feedback* dengan skema *Parallel Distributed Compensation* (PDC). Ilustrasi skema PDC dapat dilihat pada Gambar 2.11:

Aturan kontroler ke- i

If z_1 is M_{i1} and z_2 is M_{i2} ... and z_j is M_{ij}

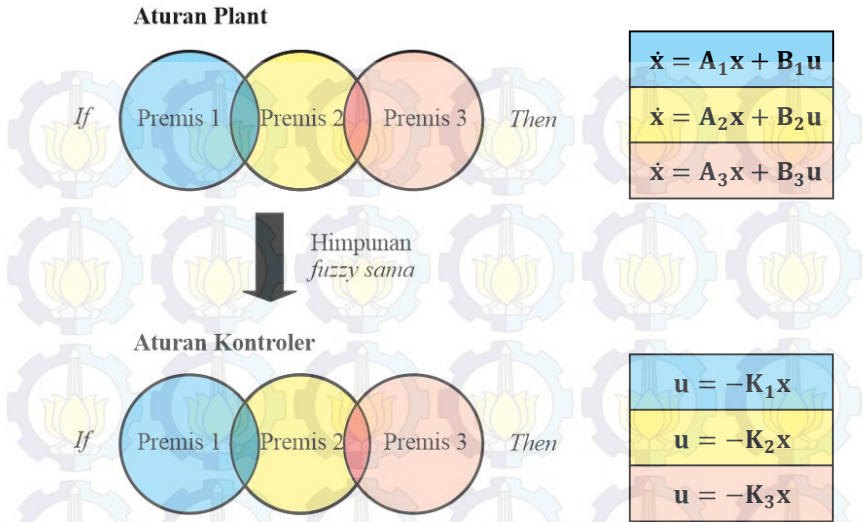
Then $\mathbf{u} = -\mathbf{K}_i \mathbf{x}; i = 1, 2, \dots, r$ (2.40)

Keluaran dari kontroler *fuzzy* secara keseluruhan dapat dituliskan dengan:

$$\mathbf{u} = - \sum_{i=1}^r m_i(z) [\mathbf{K}_i \mathbf{x}] \quad (2.41)$$

Dengan memasukkan (2.41) ke dalam (2.37), didapatkan keseluruhan sistem lup tertutup pada (2.42):

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r m_i(z) [(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{K}_j) \mathbf{x}] \\ \mathbf{y} &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r m_i(z) [(\mathbf{C}_i - \mathbf{D}_i \mathbf{K}_j) \mathbf{x}] \end{aligned} \right\} \quad (2.42)$$



Gambar 2.11 Skema *Parallel Distributed Compensation* (PDC)

2.7 Kontroler *State Feedback* dengan Kompensator [5]

Kontroler *state-feedback* dari (2.15) dinyatakan dengan

$$u = -Kx \quad (2.43)$$

Kompensator dirancang berdasarkan sinyal referensi dan sinyal gangguan. Dalam bentuk persamaan *state*, model sinyal tersebut dapat dinyatakan dengan (2.44). Jika dihubungkan dengan *plant* yang dikontrol dengan menganggap *tracking error* $e = r - y$ sebagai masukan dari model, maka akan diperoleh bentuk (2.45):

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_r &= A_r x_r \\ y_r &= C_r x_r \end{aligned} \right\} \quad (2.44)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c e_t \\ y_c &= x_c \end{aligned} \right\} \quad (2.45)$$

dengan:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_c &= \text{diag}\{\mathbf{A}_{r1} \mathbf{A}_{r2} \dots \mathbf{A}_{rs}\} \\ \mathbf{B}_c &= \text{diag}\{\mathbf{B}_{r1} \mathbf{B}_{r2} \dots \mathbf{B}_{rs}\} \end{aligned} \quad (2.46)$$

dengan \mathbf{A}_r dan \mathbf{B}_r adalah matriks polinomial karakteristik dari sinyal referensi dan s merupakan jumlah sinyal referensi dan $\mathbf{x}_c \in \mathcal{R}^c$, $\mathbf{e}_t \in \mathcal{R}^l$, $\mathbf{y}_c \in \mathcal{R}^d$ merupakan *state* kompensator, *error tracking*, dan output kompensator. Berdasarkan persamaan kompensator (2.45) dan persamaan *plant* (2.15), maka dapat disusun suatu *augmented system*

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{x}}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{B}_c \mathbf{C}_t & \mathbf{A}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_c \end{bmatrix} \mathbf{r} \quad (2.47)$$

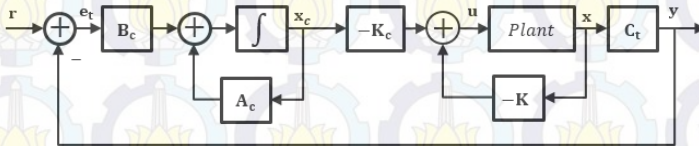
dan sinyal kontrol:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= -[\mathbf{K} \quad \mathbf{K}_c] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_c \end{bmatrix} \\ \mathbf{u} &= -\mathbf{K}\mathbf{x} - \mathbf{K}_c\mathbf{x}_c \end{aligned} \quad (2.48)$$

dengan \mathbf{K} adalah *gain state feedback* dan \mathbf{K}_c adalah *gain* kompensator. \mathbf{K} dan \mathbf{K}_c dapat dihitung menggunakan teknik LMI, optimal, atau *pole placement*. Struktur kontrol *state-feedback* dengan kompensator dapat dilihat pada Gambar 2.12

2.8 Analisa Kestabilan Lyapunov [7]

Dalam merancang suatu sistem kontrol, kestabilan sistem mutlak harus dipenuhi. Untuk sistem *linear time invariant*, berbagai kriteria stabilitas dapat diterapkan. Kriteria stabilitas tersebut diantaranya adalah kriteria stabilitas Routh. Namun untuk sistem nonlinear dan/atau *linear time varying*, kriteria stabilitas tersebut tidak dapat diaplikasikan.



Gambar 2.12 Kontrol *State Feedback Fuzzy T-S* dengan Kompensator

Pada tahun 1892, A. M. Lyapunov mengajukan dua metode untuk menentukan kestabilan sistem yang dinyatakan dalam persamaan diferensial. Metode pertama yang diajukan cukup sulit karena harus mencari solusi dari persamaan diferensial. Namun, metode kedua yang diajukan lebih mudah karena dalam menentukan kestabilan sistem tidak perlu menyelesaikan persamaan diferensial. Representasi sistem yang diajukan Lyapunov yaitu

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (2.49)$$

dengan $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$ adalah *state* sistem dan $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{R}^n$ adalah fungsi dari \mathbf{x} dan t . Sistem pada (2.49) memiliki *state* ekulibrium \mathbf{x}_e untuk semua t dengan

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_e, t) = \mathbf{0} \quad (2.50)$$

Pada metode kedua Lyapunov, sistem dikatakan stabil asimtotik pada *state* ekulibriumnya jika energi yang tersimpan pada sistem berangsur-angsur berkurang seiring bertambahnya waktu hingga mencapai nilai minimum pada *state* ekulibriumnya. Oleh karena itu, Lyapunov merumuskan suatu fungsi energi buatan yang nantinya dapat digunakan untuk menganalisa kestabilan.

Fungsi Lyapunov bergantung pada x_1, x_2, \dots, x_n , dan t . Fungsi tersebut dapat dituliskan sebagai $V(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ atau $V(\mathbf{x}, t)$. Apabila fungsi Lyapunov tidak mengandung t secara eksplisit, maka fungsi tersebut dapat disederhanakan menjadi $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ atau $V(\mathbf{x})$. Pada metode kedua Lyapunov tanda dari $V(\mathbf{x}, t)$ dan $\dot{V}(\mathbf{x}, t) = dV(\mathbf{x}, t)/dt$ memberikan informasi mengenai kestabilan, kestabilan asimtotik, dan ketidakstabilan dari sebuah *state* ekulibrium tanpa mengharuskan menyelesaikan solusi persamaan diferensial dari (2.49).

Suatu sistem dapat dinyatakan dengan (2.49) dengan

$$\mathbf{f}(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0} \quad , \text{ untuk semua nilai } t \quad (2.51)$$

Jika terdapat fungsi skalar $V(\mathbf{x}, t)$ yang mempunyai turunan parsial pertama yang kontinu dan memenuhi kondisi:

1. $V(\mathbf{x}, t)$ adalah definit positif
2. $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$ adalah definit negatif

maka *state* ekuilibrium pada *origin* adalah stabil asimtotik.

Jika terdapat sistem linear *time-invariant* dengan (2.52)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (2.52)$$

dengan $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$ adalah *state* sistem, $\mathbf{A} \in \mathcal{R}^{n \times n}$ matriks konstan nonsingular, dan *state* ekuilibrium pada origin ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$). Kestabilan dari *state* ekuilibrium dapat diketahui dengan menggunakan metode kedua Lyapunov. Fungsi kandidat Lyapunov untuk (2.52) dipilih sebagai berikut

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \quad (2.53)$$

dengan \mathbf{P} adalah matriks simetris. Turunan pertama fungsi kandidat Lyapunov (2.53) adalah:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{V}(\mathbf{x}) &= (\mathbf{A}\mathbf{x})^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} (\mathbf{A}\mathbf{x}) \\ \dot{V}(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x} \\ \dot{V}(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x} \end{aligned} \quad (2.54)$$

Sistem (2.52) akan stabil asimtotik pada *state* ekuilibriumnya apabila memenuhi syarat bahwa kandidat fungsi Lyapunov adalah definit positif dan derivatif dari kandidat fungsi Lyapunov adalah definit negatif. Syarat tersebut dapat dituliskan sebagai berikut:

1. $V(\mathbf{x}, t)$ adalah definit positif
 $\mathbf{P} > 0$ dan simetris
2. $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$ adalah definit negatif
 $\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} < 0$

2.9 Linear Matrix Inequality (LMI) [9]

Analisa kestabilan Lyapunov merupakan permasalahan pertama dari LMI. Sistem tersebut stabil apabila terdapat matriks $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$ yang memenuhi (2.55):

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} < 0 \quad (2.55)$$

Penyelesaian solusi matriks \mathbf{P} untuk orde yang kecil ($n \leq 2$) masih bisa dilakukan dengan mudah secara analitis. Namun untuk orde yang besar penyelesaian solusi secara analitis sangat sulit dilakukan. Penyelesaian tersebut dapat diselesaikan secara numerik dengan optimisasi konveks atau yang lebih dikenal dengan *Linear Matrix Inequality* (LMI). *Linear Matrix Inequality* memiliki bentuk

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_0 + \sum_{i=1}^m x_i \mathbf{F}_i > 0 \quad (2.56)$$

dengan $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^m$ adalah variabel dan matriks simetris $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^T \in \mathcal{R}^m$, $i = 0, \dots, m$. Persamaan (2.56) merupakan fungsi kendala dari \mathbf{x} dengan tujuan adalah mendapatkan matriks $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ simetris positif definit.

Beberapa LMI $\mathbf{F}^{(1)}(\mathbf{x}) > 0, \dots, \mathbf{F}^{(p)}(\mathbf{x}) > 0$ dapat dituliskan dalam satu LMI dengan $\text{diag}(\mathbf{F}^{(1)}(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{F}^{(p)}(\mathbf{x})) > 0$. Ketika matriks \mathbf{F}_i adalah matriks diagonal, LMI $\mathbf{F}(\mathbf{x}) > 0$ menjadi kumpulan suatu pertidaksamaan linear. Untuk kasus pertidaksamaan nonlinear (2.57) (*convex*), pertidaksamaan tersebut dapat diubah ke dalam bentuk LMI (2.58) menggunakan *Schur Complement*:

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}) > 0, \quad \mathbf{Q}(\mathbf{x}) - \mathbf{S}(\mathbf{x})\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{S}(\mathbf{x})^T > 0 \quad (2.57)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}(\mathbf{x}) & \mathbf{S}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{S}(\mathbf{x})^T & \mathbf{R}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} > 0 \quad (2.58)$$

dengan $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}(\mathbf{x})^T$, $\mathbf{R}(\mathbf{x}) = \mathbf{R}(\mathbf{x})^T$. Pada (2.55) matriks $\mathbf{A} \in \mathcal{R}^{n \times n}$ adalah matriks yang diketahui dan matriks $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T \in \mathcal{R}^{n \times n}$ adalah matriks variabel. Sesuai dengan (2.56) dan syarat kestabilan Liapunov (2.55):

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{(1)} &= -\mathbf{A}^T \mathbf{P} - \mathbf{P} \mathbf{A} > 0 \\ \mathbf{F}^{(2)} &= \mathbf{P} > 0 \end{aligned}$$

Karena terdapat dua LMI, maka kedua LMI tersebut dapat dituliskan dalam satu LMI:

$$\begin{aligned} \text{diag} \left(\mathbf{F}^{(1)}(\mathbf{x}) > 0, \dots, \mathbf{F}^{(p)}(\mathbf{x}) \right) &> 0 \\ \begin{bmatrix} \mathbf{F}^{(1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}^{(2)} \end{bmatrix} &> 0 \\ \begin{bmatrix} -\mathbf{A}^T \mathbf{P} - \mathbf{P} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P} \end{bmatrix} &> 0 \end{aligned} \quad (2.59)$$

2.10 Proportional Multiple Integral Observer (PMIO) [4]

Propotional Integral (PI) observer merupakan perluasan dari *observer* Luenberger. Munculnya integral pada *error* estimasi membuat estimasi lebih efektif terhadap *perturbations* dan *input disturbances*. *PI observer* dapat diperluas untuk estimasi *unknown input fault* yang tidak konstan dengan menambahkan *multiple integral*. Perluasan *observer* PI tersebut dapat disebut sebagai *Proportional Multiple Integral Observer* (PMIO). Oleh karenanya, berbagai *unknown input* dapat diestimasi.

Suatu sistem linear dengan persamaan *state* seperti pada (2.60):

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{x}_f &= \mathbf{x} + \mathbf{D}_f \mathbf{f}_s \end{aligned} \right\} \quad (2.60)$$

dengan $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathcal{R}^m$, $\mathbf{f}_s \in \mathcal{R}^k$, $\mathbf{x}_f \in \mathcal{R}^n$ secara berturut-turut adalah *state* sistem, sinyal kontrol, keluaran sistem, kesalahan sensor, dan *state* sistem *faulty*. Matriks \mathbf{A} , \mathbf{B} , dan \mathbf{D}_f adalah matriks konstan dengan dimensi yang bersesuaian. Misal \mathbf{f}_s^q adalah derivatif kesalahan sensor ke- q , maka dapat dibuat suatu *state* tambahan (2.61) dan sistem augmentasi (2.62):

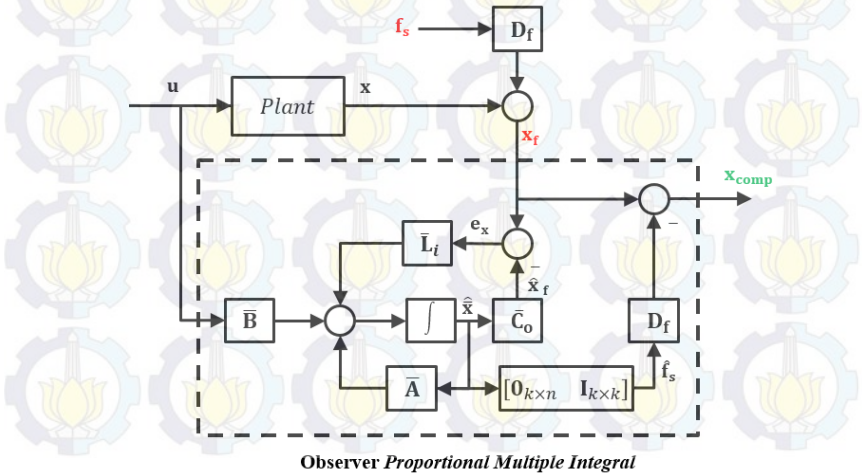
$$\boldsymbol{\varphi}_i = \mathbf{f}_s^{q-i} (i = 1, 2, \dots, q); \boldsymbol{\varphi}_1 = \mathbf{f}_s^q; \boldsymbol{\varphi}_2 = \boldsymbol{\varphi}_1; \dots; \boldsymbol{\varphi}_q = \boldsymbol{\varphi}_{q-1} \quad (2.61)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{x}}} &= \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u} + \mathbf{G}\mathbf{f}_s^q \\ \mathbf{x}_f &= \bar{\mathbf{C}}_0 \bar{\mathbf{x}} \end{aligned} \right\} \quad (2.62)$$

dengan:

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{R}^{\bar{n}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\varphi}_1 \\ \boldsymbol{\varphi}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varphi}_q \end{bmatrix} & \bar{\mathbf{A}} \in \mathcal{R}^{\bar{n} \times \bar{n}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0}_{n \times k} & \cdots & \mathbf{0}_{n \times k} & \mathbf{0}_{n \times k} \\ \mathbf{0}_{k \times n} & \mathbf{0}_{k \times k} & \cdots & \mathbf{0}_{k \times k} & \mathbf{0}_{k \times k} \\ \mathbf{0}_{k \times n} & \mathbf{I}_{k \times k} & \cdots & \mathbf{0}_{k \times k} & \mathbf{0}_{k \times k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0}_{k \times n} & \mathbf{0}_{k \times k} & \cdots & \mathbf{I}_{k \times k} & \mathbf{0}_{k \times k} \end{bmatrix} \\
 \bar{\mathbf{B}} \in \mathcal{R}^{\bar{n} \times m} &= \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0}_{k \times m} \\ \mathbf{0}_{k \times m} \\ \vdots \\ \mathbf{0}_{k \times m} \end{bmatrix} & \mathbf{G} \in \mathcal{R}^{\bar{n} \times k} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times k} \\ \mathbf{I}_k \\ \mathbf{0}_{k \times k} \\ \vdots \\ \mathbf{0}_{k \times k} \end{bmatrix} \\
 \bar{\mathbf{C}}_o \in \mathcal{R}^{l \times \bar{n}} &= [\mathbf{I}_n \quad \mathbf{0}_{n \times k} \quad \mathbf{0}_{n \times k} \quad \cdots \quad \mathbf{D}_f] \\
 \bar{n} &= n + kq
 \end{aligned} \tag{2.63}$$

PMI *Observer* mampu mengestimasi *state* sistem dan kesalahan sensor secara simultan dituliskan pada (2.64) dan diilustrasikan pada Gambar 2.13:



Gambar 2.13 Struktur *Proportional Multiple Integral Observer* (PMIO)

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \{\bar{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u} + \bar{\mathbf{L}}(\mathbf{x}_f - \bar{\mathbf{C}}_0\hat{\mathbf{x}})\} \quad (2.64)$$

dengan $\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{R}^{\bar{n}}$ dan $\bar{\mathbf{L}} \in \mathcal{R}^{\bar{n} \times l}$ secara berturut-turut adalah estimasi *state* $\bar{\mathbf{x}}$ dan *gain observer* hasil desain. PMI *Observer* pada (2.64) eksis apabila memenuhi syarat *observable* pada (2.65) dan (2.66):

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_n & \mathbf{D}_f \end{bmatrix} = n + k \quad (2.65)$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} \\ \mathbf{I}_n \end{bmatrix} = n, \quad \forall s \in \mathbb{C} \quad (2.66)$$

2.11 Performa H_∞ [10]

Tujuan utama dalam perancangan sistem kontrol yaitu sistem kontrol hasil desain dapat stabil dengan performa yang diinginkan. Namun kenyataannya, adanya gangguan dari luar dapat mengganggu kestabilan sistem. Oleh karena itu, sistem kontrol yang dirancang harus *robust* (kokoh) terhadap gangguan dari luar. Sistem dikatakan memiliki performa *robust* apabila sistem tersebut mampu menjaga kestabilannya meskipun terdapat gangguan dari luar.

Metode kontrol *robust* yang sering digunakan adalah kontrol H_∞ . Pada H_∞ , kontroler didesain untuk meminimalkan pengaruh terburuk dari gangguan yang masuk. Pengaruh terburuk gangguan terhadap keluaran performa dapat diketahui dengan menghitung ∞ -norm dari fungsi alih sistem yang didefinisikan sebagai

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{\omega} |G(j\omega)| \quad (2.67)$$

dengan $G(s)$ adalah fungsi alih keluaran terhadap gangguan dan ∞ -norm dari fungsi alih $G(s)$ adalah nilai maksimal dari magnitudo $G(j\omega)$.

Konfigurasi sistem kontrol *robust* dapat dilihat pada Gambar 2.14. Dari Gambar tersebut \mathbf{P} dan \mathbf{K} menyatakan *plant* dan kontroler. Masukan dari *plant* adalah \mathbf{u} dan \mathbf{w} yang masing-masing menyatakan sinyal kontrol dan gangguan. Keluaran dari *plant* adalah \mathbf{y} dan \mathbf{z} keluaran terukur untuk kontroler dan keluaran performa.

Dalam Tugas Akhir ini, *observer* dirancang agar memiliki performa H_∞ . Nilai *gain* PMI *Observer* dihitung sedemikian hingga pengaruh terburuk dari \mathbf{f}_s^q terhadap keluaran performa \mathbf{z} kurang dari tingkat

pelemahan (γ_{pmi}) yang diinginkan. Performa H_∞ yang berkaitan dengan *error* estimasi *state* augmentasi PMI *Observer* \mathbf{e}_x adalah

$$\frac{\|\mathbf{z}\|_2}{\|\mathbf{w}\|_2} = \frac{\sqrt{\int_0^{t_f} \mathbf{e}_x^T \mathbf{C}_p^T \mathbf{C}_p \mathbf{e}_x dt}}{\sqrt{\int_0^{t_f} \mathbf{w}^T \mathbf{w} dt}} \leq \gamma_{pmi} \quad (2.68)$$

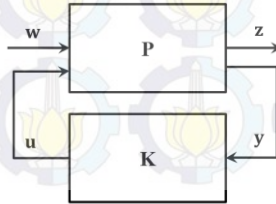
dengan menguadratkan kedua ruas didapat

$$\frac{\int_0^{t_f} \mathbf{e}_x^T \mathbf{C}_p^T \mathbf{C}_p \mathbf{e}_x dt}{\int_0^{t_f} \mathbf{w}^T \mathbf{w} dt} \leq \gamma_{pmi}^2 \quad (2.69)$$

$$\int_0^{t_f} \mathbf{e}_x^T \mathbf{C}_p^T \mathbf{C}_p \mathbf{e}_x dt = \gamma_{pmi}^2 \int_0^{t_f} \mathbf{w}^T \mathbf{w} dt \quad (2.70)$$

dengan $\mathbf{e}_x = \bar{\mathbf{x}} - \hat{\bar{\mathbf{x}}}$, $\bar{\mathbf{x}}$ adalah *state* augmentasi pada PMI *Observer* dan $\hat{\bar{\mathbf{x}}}$ adalah estimasi dari $\bar{\mathbf{x}}$. \mathbf{C}_p adalah matriks pembobot, $\mathbf{w} = \mathbf{f}_s^q$ adalah derivatif ke- q dari kesalahan sensor, t_f adalah waktu akhir, dan γ_{pmi} adalah level pelemahan. Dari (2.68)-(2.70). terlihat bahwa pengaruh \mathbf{f}_s^q pada *error* estimasi *state* augmentasi PMI *Observer* harus dilemahkan kurang dari atau sama dengan level pelemahan γ_{pmi}^2 . Adapun ∞ -norm dari fungsi alih sistem (2.68) dapat dihitung sesuai dengan (2.71):

$$\left\| \frac{Z(s)}{W(s)} \right\|_\infty = \sup_\omega \left| \frac{Z(j\omega)}{W(j\omega)} \right| = \sup_{\|\mathbf{w}\|_2 \neq 0} \frac{\|\mathbf{z}\|_2}{\|\mathbf{w}\|_2} \quad (2.71)$$



Gambar 2.14 Konfigurasi Sistem Kontrol *Robust* [10]

2.12 Pole Placement pada LMI Region [11]

Kestabilan adalah persyaratan minimum dalam sistem kontrol. Namun, sebuah kontroler juga harus mampu memberikan respons yang cepat dan *overshoot* seminimal mungkin. Hal tersebut dapat dicapai dengan menempatkan pole sistem lup tertutup sistem pada daerah D . Daerah D merupakan daerah desain yang diinginkan dan berada pada bidang kompleks sebagaimana tertera pada Gambar 2.15.

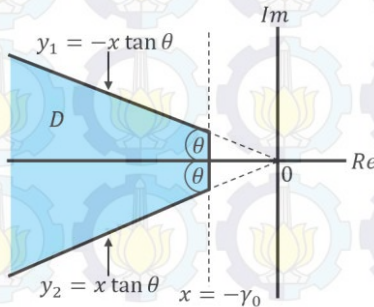
Settling time dan *overshoot* respons sistem bergantung pada pemilihan *damping ratio* ($\cos \theta$). Sementara kecepatan respons sistem bergantung pada γ_0 . Subset daerah D pada bidang kompleks disebut sebuah LMI *region* jika terdapat matriks simetris \mathbf{L} dan \mathbf{M} sehingga

$$D = \{z \in \mathbb{C} : f_d(z) < 0\} \quad (2.72)$$

dengan $f_d(z) = \mathbf{L} + z\mathbf{M} + \bar{z}\mathbf{M}^T$ dan disebut sebagai fungsi karakteristik dari D . Berikut ini adalah beberapa contoh LMI region:

1. *Half plane* dengan LMI *region* berada di sebelah kiri $Re(z) = -\gamma_0$ (Gambar 2.16)

$$f_d(z) = z + \bar{z} + 2\gamma_0 < 0 \quad (2.73)$$



Gambar 2.15 Pole Placement pada LMI

2. Kerucut dengan LMI *region* berada di dalam kerucut dan sudut antara sisi miring kerucut dengan sumbu $Re(z)$ adalah θ (Gambar 2.17)

$$f_d(z) = \begin{bmatrix} \sin \theta(z + \bar{z}) & \cos \theta(z - \bar{z}) \\ (\cos \theta(z - \bar{z}))^T & \sin \theta(z + \bar{z}) \end{bmatrix} < 0 \quad (2.74)$$

3. Lingkaran yang berpusat pada $(-q, 0)$ dengan jari-jari r (Gambar 2.18)

$$f_d(z) = \begin{bmatrix} -r & q + z \\ q + \bar{z} & -r \end{bmatrix} < 0 \quad (2.75)$$

Pole dari *closed loop system* berada di daerah D seperti pada Gambar 2.16-Gambar 2.18 dapat diperoleh dengan mencari *gain* kontroler \mathbf{K} dan matriks kestabilan $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$ yang memenuhi LMI berikut ini:

1. *Half plane*

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{P} > 0 \\ \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^T + (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{P} + 2\gamma_0\mathbf{P} < 0 \end{array} \right\} \quad (2.76)$$

2. Kerucut

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{P} > 0 \\ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^T & \alpha \end{bmatrix} < 0 \end{array} \right\} \quad (2.77)$$

dengan

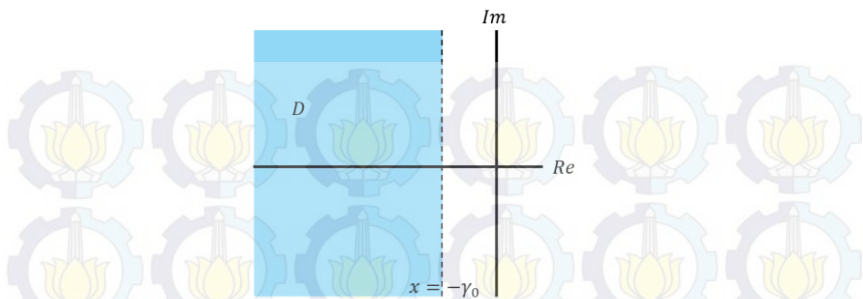
$$\begin{aligned} \alpha &= \sin \theta ((\mathbf{A} - \mathbf{BK})^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{BK})) \\ \beta &= \cos \theta (-(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} + \mathbf{BK})) \end{aligned}$$

3. Lingkaran

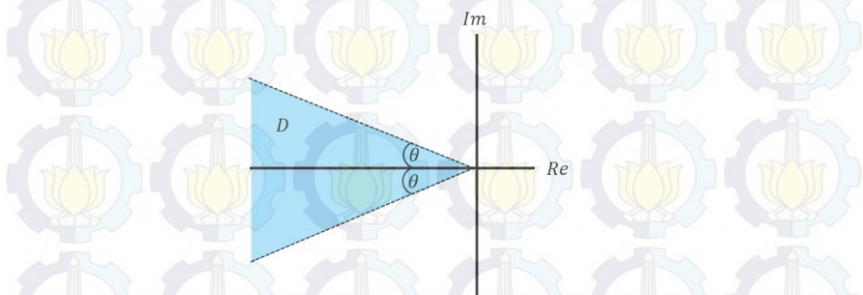
$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{P} > 0 \\ \begin{bmatrix} -r\mathbf{P} & \rho \\ \rho^T & -r\mathbf{P} \end{bmatrix} < 0 \end{array} \right\} \quad (2.78)$$

dengan

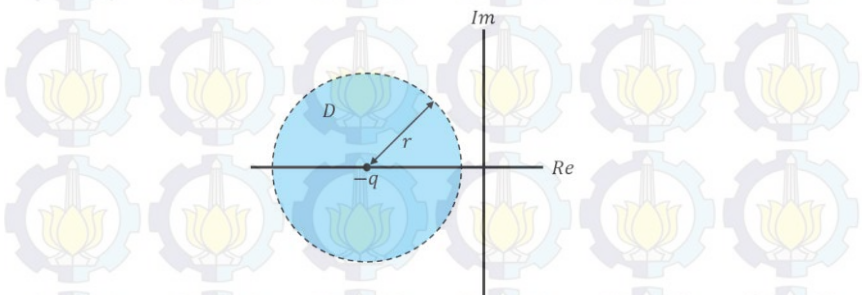
$$\rho = q\mathbf{P} + (\mathbf{A} - \mathbf{BK})^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$$



Gambar 2.16 *Half Plane* dengan LMI Region di Sebelah Kiri $x = -\gamma_0$



Gambar 2.17 Kerucut dengan LMI Region Berada di Dalam Kerucut



Gambar 2.18 Lingkaran dengan LMI Region Berada di Dalam Lingkaran

Pertidaksamaan (2.76)-(2.78) merupakan permasalahan *Bilinear Matrix Inequalities* (BMI) karena mengandung perkalian langsung antara dua matriks variabel yaitu $\mathbf{K}\mathbf{P}$ dan $\mathbf{P}\mathbf{K}^T$. Agar permasalahan tersebut

dapat diselesaikan dengan LMI, maka perkalian langsung antara dua matriks variabel harus dihindari yaitu dengan cara menambahkan matriks bantu $\mathbf{Y} = \mathbf{K}\mathbf{P}$. Dengan mensubstitusi $\mathbf{Y} = \mathbf{K}\mathbf{P}$ ke dalam (2.76)-(2.78) didapatkan:

1. *Half plane*

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{P} > 0 \\ \mathbf{P}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\mathbf{P} - \mathbf{B}\mathbf{Y} - \mathbf{Y}^T\mathbf{B}^T + 2\gamma_0\mathbf{P} < 0 \end{array} \right\} \quad (2.79)$$

2. Kerucut

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{P} > 0 \\ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^T & \alpha \end{bmatrix} < 0 \end{array} \right\} \quad (2.80)$$

dengan

$$\begin{aligned} \alpha &= \sin \theta (\mathbf{P}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\mathbf{P} - \mathbf{B}\mathbf{Y} - \mathbf{Y}^T\mathbf{B}^T) \\ \beta &= \cos \theta (-\mathbf{P}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\mathbf{P} - \mathbf{B}\mathbf{Y} + \mathbf{Y}^T\mathbf{B}^T) \end{aligned}$$

3. Lingkaran

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{P} > 0 \\ \begin{bmatrix} -r\mathbf{P} & \rho \\ \rho^T & -r\mathbf{P} \end{bmatrix} < 0 \end{array} \right\} \quad (2.81)$$

dengan

$$\rho = q\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\mathbf{P} - \mathbf{B}\mathbf{Y} - \mathbf{Y}^T\mathbf{B}^T$$

Nilai *gain* \mathbf{K} dapat dicari dengan $\mathbf{K} = \mathbf{Y}\mathbf{P}^{-1}$

2.13 Batasan untuk Optimasi *Gain* [11]

Pole placement pada LMI *region* terkadang mengakibatkan *gain* kontroler bernilai sangat besar. Hal ini dapat mengakibatkan beban komputasi menjadi bertambah apabila memakai kontroler digital dan sulit untuk mencari kontroler dengan spesifikasi *gain* yang besar apabila menggunakan kontroler analog. Akibat lainnya yaitu sinyal kontrol yang

dihasilkan menjadi sangat besar pula, sehingga implementasi pada *plant* nyata menjadi sulit untuk dilakukan.

Oleh karenanya, diperlukan pembatasan *gain* agar nilai *gain* yang dihasilkan akibat *pole placement* pada LMI *region* berada di bawah suatu batas nilai. Untuk membatasi *gain*, maka kondisi berikut harus dipenuhi:

$$\mathbf{Y}^T \mathbf{Y} < k_y \mathbf{I} \quad (2.82)$$

$$\mathbf{P}^{-1} < k_p \mathbf{I} \quad (2.83)$$

Dengan k_y dan k_p adalah bilangan positif. Dengan menerapkan *Schur Complement* pada (2.82) dan (2.83) didapatkan:

$$\begin{bmatrix} -k_y \mathbf{I} & \mathbf{Y}^T \\ \mathbf{Y} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.84)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & k_p \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \quad (2.85)$$

BAB 3

PERANCANGAN SISTEM KONTROL

Bab ini akan membahas mengenai perancangan kontrol *tracking* toleransi kesalahan sensor pada Sistem Pendulum Kereta. Sistem Pendulum Kereta dilinearisasi pada dua titik kerja, kemudian kontrol linear dan PMI *Observer* dirancang untuk masing-masing model linear berdasarkan konsep PDC. Kontrol linear yang digunakan berupa *state-feedback* dengan kompensator. *Gain* kontroler diperoleh dengan teknik *pole placement* pada *LMI region*. *Gain* PMI *Observer* diperoleh berdasarkan analisa kestabilan Liapunov, performa H_∞ dan *pole-placement* pada *LMI region*. Nilai *gain* kontroler dan PMI *Observer* dihitung menggunakan *LMI toolbox* yang ada pada Matlab. Terakhir, keseluruhan sistem disusun pada diagram Simulink untuk simulasi dan implelementasi.

3.1 Linearisasi Sistem Pendulum Kereta

Persamaan (2.9) merupakan model matematika dari Sistem Pendulum Kereta. Persamaan tersebut menunjukkan bahwa Sistem Pendulum Kereta merupakan sistem nonlinear. Linearisasi pada beberapa titik kerja diperlukan untuk merepresentasikan sistem tersebut dalam model linear agar teori kontrol linear dapat diterapkan. Titik kerja tersebut berada di sekitar titik ekuilibrium. Titik ekulibrium merupakan titik di mana semua laju perubahan *state* sistem bernilai nol.

Model matematika Sistem Pendulum Kereta dapat dituliskan dengan:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$

$$\begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ f_3(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ f_4(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \frac{a(u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2) + l \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{J + \mu l \sin^2 x_2} \\ \frac{l \cos x_2 (u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2) + \mu g \sin x_2 - f_p x_4}{J + \mu l \sin^2 x_2} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Titik ekuilibrium Sistem Pendulum Kereta dapat diperoleh dengan menyelesaikan (3.2):

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e, t) = \mathbf{0} \quad (3.2)$$

Dengan memasukkan (2.9) ke dalam (3.2), didapatkan titik ekuilibrium sistem

$$\mathbf{x}_e = [k \quad n\pi \quad 0 \quad 0]; \quad \mathbf{u}_e = 0 \quad (3.3)$$

dengan k adalah elemen bilangan real dan n adalah elemen bilangan bulat.

Linearisasi lokal Sistem Pendulum Kereta dilakukan di sekitar *state* ekuilibriumnya.. Model linear Sistem Pendulum Kereta didapatkan dengan linearisasi di sekitar $\mathbf{x}^* = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$ dan $\mathbf{u}^* = 0$, $\mathbf{x}^* = [0 \quad \pm 0,25 \quad 0 \quad 0]$ dan $\mathbf{u}^* = 0$. Penurunan rumus matriks Jacobi \mathbf{A} dan \mathbf{B} dibahas lebih lanjut pada Lampiran A.2:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1 \mathbf{u}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_2 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_2 \mathbf{u}(t) \end{aligned}$$

dengan:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0,2525 & 0 & -0,0001 \\ 0 & 15,0376 & 0 & -0,0079 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,8272 \\ 1,2370 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0,2205 & 0 & -0,0001 \\ 0 & 14,5014 & 0 & -0,0079 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,8259 \\ 1,1967 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Matriks keluaran untuk ketiga model linear Sistem Pendulum Kereta adalah sama:

$$\mathbf{C}_{t1} = \mathbf{C}_{t2} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (3.6)$$

$$\mathbf{D}_1 = \mathbf{D}_2 = 0 \quad (3.7)$$

3.2 Pemodelan *Fuzzy Takagi-Sugeno*

Model *fuzzy T-S* dibangun berdasarkan linearisasi sistem nonlinear pada beberapa titik kerja. Titik kerja yang dipilih adalah titik kerja yang berada di sekitar titik ekuilibrium dari sistem. Karena posisi pendulum ingin dijaga pada posisi terbaliknya dengan posisi kereta dipaksa mengikuti sinyal referensi maka dipilih titik ekuilibrium adalah $x_2 = 0$ rad, sementara titik kerja yang dipilih adalah $x_2 = 0$ rad dan $x_2 = \pm 0,25$ rad. Berdasarkan titik kerja yang dipilih dapat disusun dua aturan *plant* (*If* premis *Then* konsekuen) dengan premis adalah x_2 :

Aturan *plant* ke-1

$$\begin{aligned} \text{If } & x_2(t) \text{ is } M_1 \text{ (sekitar } 0 \text{ rad)} \\ \text{Then } & \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1 \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_{11} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_1 \mathbf{u}(t) \end{aligned} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Aturan *plant* ke-2

$$\begin{aligned} \text{If } & x_2(t) \text{ is } M_2 \text{ (sekitar } \pm 0,25 \text{ rad)} \\ \text{Then } & \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_2 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_2 \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_{21} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_2 \mathbf{u}(t) \end{aligned} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Aturan kontroler *fuzzy* berdasarkan skema PDC dan Subbab 2.7 dapat dituliskan sebagai berikut:

Aturan kontroler ke-1

$$\begin{aligned} \text{If } & x_2(t) \text{ is } M_1 \text{ (sekitar } 0 \text{ rad)} \\ \text{Then } & \mathbf{u}(t) = -[\mathbf{K}_1 \quad \mathbf{K}_{c1}] \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_c(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Aturan kontroler ke-2

$$\begin{aligned} \text{If } & x_2(t) \text{ is } M_2 \text{ (sekitar } \pm 0,25 \text{ rad)} \\ \text{Then } & \mathbf{u}(t) = -[\mathbf{K}_2 \quad \mathbf{K}_{c2}] \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_c(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Sedangkan aturan *observer fuzzy* berdasarkan skema PDC dan Subbab 2.10 dapat dituliskan dengan:

Aturan *observer* ke-1

If $x_2(t)$ is M_1 (sekitar 0 rad)

Then $\hat{\dot{x}} = \bar{A}_1 \hat{x} + \bar{B}_1 u + \bar{L}_1 (x_f - \bar{C}_0 \bar{x})$ (3.12)

Aturan *observer* ke-1

If $x_2(t)$ is M_2 (sekitar $\pm 0,25$ rad)

Then $\hat{\dot{x}} = \bar{A}_2 \hat{x} + \bar{B}_2 u + \bar{L}_2 (x_f - \bar{C}_0 \bar{x})$ (3.13)

Fungsi keanggotaan M_1 merupakan fungsi keanggotaan *Triangular*, sementara M_2 dipilih merupakan fungsi keanggotaan *Trapezoidal*. Plot fungsi keanggotaan M_1 dan M_2 ditunjukkan pada Gambar 3.1.

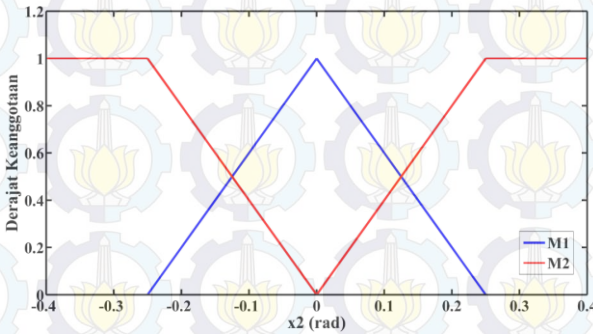
3.3 Kompensator

Kompensator dirancang berdasarkan sinyal referensi yang diberikan pada sistem. Sinyal referensi yang diberikan berupa sinyal sinus dengan frekuensi f Hz dan amplitudo A m yang dapat dituliskan dengan:

$$r(t) = A \sin(2\pi f t) \quad (3.14)$$

Dengan melakukan transformasi Laplace, maka (3.14) dapat dituliskan menjadi

$$R(s) = \frac{A2\pi f}{s^2 + (2\pi f)^2} \quad (3.15)$$



Gambar 3.1 Fungsi Keanggotaan *Plant*, Kontroler, dan *Observer*

dari (3.15) didapatkan matriks \mathbf{A}_c dan \mathbf{B}_c :

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(2\pi f)^2 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ A2\pi f \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

dengan memasukkan nilai $f = 0,1$ Hz dan $A = 0,1$ m, maka nilai matriks \mathbf{A}_c dan \mathbf{B}_c adalah sebagai berikut:

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,3948 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,0628 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

3.4 Perancangan Kontroler *State Feedback* Kompensator Fuzzy T-S

Ada beberapa tahapan yang dilakukan dalam merancang kontroler *state feedback* kompensator fuzzy T-S diantaranya membentuk *augmented fuzzy system*, *pole placement* pada LMI region dan batasan *gain* kontroler.

3.4.1 *Augmented Fuzzy System* Kontroler

Berdasarkan Subbab 2.7 *augmented fuzzy system* kontroler dapat ditulis dengan:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{x}}_c \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r m_i(x_2(t)) \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i & \mathbf{0} \\ -\mathbf{B}_c \mathbf{C}_t & \mathbf{A}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_c \end{bmatrix} \mathbf{r}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{x}}_c \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r m_i(x_2(t)) \left\{ \left(\begin{bmatrix} \mathbf{A}_i & \mathbf{0} \\ -\mathbf{B}_c \mathbf{C}_t & \mathbf{A}_c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{B}_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} [\mathbf{K}_i \quad \mathbf{K}_{ci}] \right) \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_c \end{bmatrix} \mathbf{r} \right\}$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \sum_{i=1}^r m_i(x_2(t)) \{ (\tilde{\mathbf{A}}_i - \tilde{\mathbf{B}}_i \tilde{\mathbf{K}}_i) \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{N} \mathbf{r} \} \quad (3.18)$$

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_c \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{A}}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i & \mathbf{0} \\ -\mathbf{B}_c \mathbf{C}_t & \mathbf{A}_c \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{B}}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_i = [\mathbf{K}_i \quad \mathbf{K}_{ci}] \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_c \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

dengan mensubstitusi (3.4)-(3.6) dan (3.17) ke dalam (3.18) dan (3.19) didapatkan *augmented fuzzy system* untuk setiap model:

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2526 & 0 & -0,0001 & 0 & 0 \\ 0 & 15,0421 & 0 & -0,0079 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0,0628 & 0 & 0 & 0 & -0,3948 & 0 \end{bmatrix} \\
\tilde{A}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2205 & 0 & -0,0001 & 0 & 0 \\ 0 & 14,5058 & 0 & -0,0079 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0,0628 & 0 & 0 & 0 & -0,3948 & 0 \end{bmatrix} \\
\tilde{B}_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,8272 \\ 1,2370 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \tilde{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,8259 \\ 1,1966 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,0628 \end{bmatrix} \quad (3.20)
\end{aligned}$$

3.4.2 Pole Placement Kontroler pada LMI Region

Gain kontroler dicari menggunakan LMI region agar *pole* sistem tertutup berada pada daerah yang diinginkan. Dalam Tugas Akhir ini *pole* sistem lup tertutup diletakkan pada daerah D , yaitu daerah irisan antara *half plane* dan kerucut seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2.15. Agar *pole* sistem lup tertutup berada pada daerah tersebut, maka kondisi berikut harus dipenuhi:

1. Half plane

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_i &> 0 \\
\tilde{P}_i \tilde{A}_i^T + \tilde{A}_i \tilde{P}_i - \tilde{B}_i \tilde{Y}_i - \tilde{Y}_i^T \tilde{B}_i^T + 2\gamma_k \tilde{P}_i &< 0 \quad (3.21)
\end{aligned}$$

2. Kerucut

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_i &> 0 \\
\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^T & \alpha \end{bmatrix} &< 0 \quad (3.22)
\end{aligned}$$

dengan

$$\alpha = \sin \theta_k \left(\tilde{\mathbf{P}}_i \tilde{\mathbf{A}}_i^T + \tilde{\mathbf{A}}_i \tilde{\mathbf{P}}_i - \tilde{\mathbf{B}}_i \tilde{\mathbf{Y}}_i - \tilde{\mathbf{Y}}_i^T \tilde{\mathbf{B}}_i^T \right)$$

$$\beta = \cos \theta_k \left(-\tilde{\mathbf{P}}_i \tilde{\mathbf{A}}_i^T + \tilde{\mathbf{A}}_i \tilde{\mathbf{P}}_i - \tilde{\mathbf{B}}_i \tilde{\mathbf{Y}}_i + \tilde{\mathbf{Y}}_i^T \tilde{\mathbf{B}}_i^T \right)$$

dengan $-\gamma_k$ adalah nilai *pole* sistem lup tertutup terbesar dan θ_k adalah sudut antara sisi miring kerucut dengan sumbu $Re(z)$. Terakhir, nilai *gain* kontroler $\tilde{\mathbf{K}}_i$ dapat dicari dengan $\tilde{\mathbf{K}}_i = \tilde{\mathbf{Y}}_i \tilde{\mathbf{P}}_i^{-1}$.

3.4.3 Batasan *Gain* Kontroler

Penempatan *pole* sistem lup tertutup menggunakan LMI *region* terkadang mengakibatkan *gain* kontroler terlalu besar apabila *pole* sistem lup tertutup semakin kecil. Oleh karena itu batasan *gain* kontroler diperlukan agar *gain* kontroler hasil desain di bawah suatu nilai tertentu. Untuk membatasi *gain* kontroler, maka kondisi di bawah ini harus terpenuhi:

$$\begin{bmatrix} -k_y \mathbf{I} & \tilde{\mathbf{Y}}_i^T \\ \tilde{\mathbf{Y}}_i & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.23)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_i & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & k_p \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \quad (3.24)$$

dengan k_y dan k_p merupakan bilangan positif.

3.4.4 *Gain* Kontroler Hasil Desain

Keseluruhan tahapan desain kontroler *state feedback fuzzy* T-S dapat dirangkum ke dalam Teorema 3.1.

Teorema 3.1. Kontroler *state feedback fuzzy* T-S mampu menjamin kestabilan sistem dengan nilai *pole* sistem lup tertutup berada di sebelah kiri sumbu imajiner dengan memenuhi daerah D dan *gain* yang terbatas apabila terdapat matriks $\tilde{\mathbf{P}}_i > 0$ simetris dan $\tilde{\mathbf{Y}}_i$ yang memenuhi LMI (3.21)-(3.24)

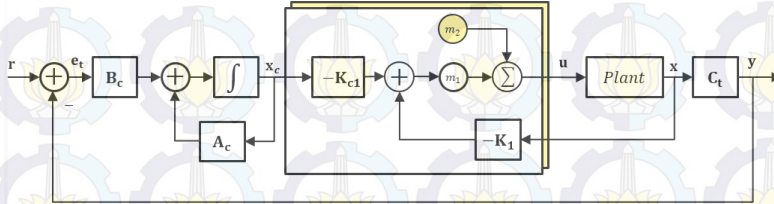
Struktur kontroler *state feedback* kompensator fuzzy T-S ditunjukkan pada Gambar 3.2 dengan parameter kontroler pada Tabel 3.1

Tabel 3.1 Parameter Desain Kontroler

LMI Region		Batasan Gain	
γ_k	θ_k	k_y	k_p
0,8	30°	4640	4640

Berdasarkan parameter pada Tabel 3.1 didapatkan *gain* kontroler hasil desain \tilde{K}_1 dan \tilde{K}_2 sebagai berikut:

$$\tilde{K}_1 = \begin{bmatrix} 63,7832 \\ -208,9139 \\ 49,7122 \\ -54,4060 \\ 173,7200 \\ -487,8034 \end{bmatrix}^T \quad \tilde{K}_2 = \begin{bmatrix} 63,4126 \\ -211,1460 \\ 49,8027 \\ -55,9139 \\ 174,0342 \\ -480,6199 \end{bmatrix}^T \quad (3.25)$$



Gambar 3.2 Struktur Kontroler *State Feedback* Kompensator Fuzzy T-S

3.5 Perancangan *Proportional Multiple Integral Observer* (PMIO) Fuzzy T-S

Pada Subbab ini akan dibahas mengenai PMI Observer yang akan digunakan sebagai *sensor fault estimator*. Pertama akan disusun suatu AFS (*Augmented Fuzzy System*) dengan *state* tambahan berupa kesalahan sensor dan derivatifnya hingga derivatif ke- q . Analisa kestabilan Lyapunov, performa H_∞ , dan LMI region digunakan untuk menjamin kestabilan sistem dan juga mampu melemahkan efek dari kesalahan sensor hingga derivatif ke- q pada *error* estimasi PMI Observer secara

simultan. Berdasarkan analisa tersebut, *gain PMI Observer* dicari menggunakan *LMI toolbox* yang ada pada *software* Matlab.

3.5.1 Augmented Fuzzy System Observer

Sistem Pendulum Kereta memiliki empat *state*, yaitu posisi kereta, posisi pendulum, kecepatan kereta, dan kecepatan pendulum. Diasumsikan semua *state* dari Sistem Pendulum Kereta adalah terukur dan terjadi kesalahan sensor pada *angle encoder* ($k = 1$) yang digunakan untuk mengukur posisi pendulum, maka berdasarkan (2.60) dapat disusun suatu *state-space* Sistem Pendulum Kereta yang mengandung kesalahan sensor:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \sum_{i=1}^r m_i(x_2(t)) \{ \mathbf{A}_i \mathbf{x} + \mathbf{B}_i \mathbf{u} \} \\ \mathbf{x}_f &= \mathbf{x} + \mathbf{D}_f \mathbf{f}_s \\ \mathbf{D}_f &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

Dalam desain *PMI Observer* juga diperlukan penetapan nilai q . Nilai q digunakan untuk menetapkan derivatif ke- q dari kesalahan sensor. Misalkan $q = 2$, maka berdasarkan (2.62) dapat disusun *augmented fuzzy system* yang dituliskan pada (3.27):

$q = 2 =$ derivatif ke- q yang mampu diestimasi *observer*
 $k = 1 =$ jumlah kesalahan sensor
 $n = 4 =$ jumlah *state* Sistem Pendulum Kereta

$$\begin{aligned} \bar{n} &= n + kq \\ \bar{n} &= 4 + (1 \times 2) \\ \bar{n} &= 6 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{x}}} &= \sum_{i=1}^r m_i(x_2(t)) \{ \bar{\mathbf{A}}_i \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{B}}_i \mathbf{u} + \mathbf{G} \mathbf{f}_s^q \} \\ \mathbf{x}_f &= \bar{\mathbf{C}}_0 \bar{\mathbf{x}} \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

$$\bar{\mathbf{x}} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad \varphi_1 \quad \varphi_2]^T \quad (3.28)$$

$$\bar{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2525 & 0 & -0,0001 & 0 & 0 \\ 0 & 15,0376 & 0 & -0,0079 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,8272 \\ 1,2370 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

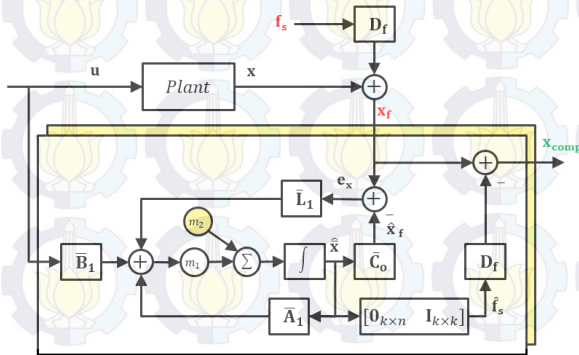
$$\bar{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2205 & 0 & -0,0001 & 0 & 0 \\ 0 & 14,5014 & 0 & -0,0079 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,8259 \\ 1,1967 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

$$\mathbf{G} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]^T \quad \bar{\mathbf{C}}_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

dengan $\varphi_1 = \dot{f}_s$ dan $\varphi_2 = f_s$.

3.5.2 Kestabilan Lyapunov PMI Observer

Berdasarkan (3.27)-(3.31) dapat dibentuk PMI *Observer* (3.32) yang mampu mengestimasi *state* Sistem Pendulum Kereta dan kesalahan sensor beserta derivatifnya. Struktur PMI *Observer* fuzzy T-S dapat dilihat pada Gambar 3.3:



Gambar 3.3 Struktur PMI *Observer Fuzzy* T-S

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \sum_{i=1}^r m_i(x_2(t)) \{ \bar{\mathbf{A}}_i \hat{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{B}}_i \mathbf{u} + \bar{\mathbf{L}}_i (\mathbf{x}_f - \bar{\mathbf{C}}_o \hat{\mathbf{x}}) \} \quad (3.32)$$

PMI *Observer* tersebut eksis apabila memenuhi syarat observabilitas:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_n & \mathbf{D}_f \end{bmatrix} = n + k \quad \text{dan} \quad \text{rank} \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A}_i \\ \mathbf{I}_n \end{bmatrix} = n, \forall s \in \mathbb{C}$$

Berdasarkan (2.66) observabilitas tiap model linear dari Sistem Pendulum Kereta dapat diperiksa:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_n & \mathbf{D}_f \end{bmatrix} = 5 \quad \text{dan} \quad \text{rank} \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{I}_n \end{bmatrix} = 4, \forall s \in \mathbb{C} \quad (3.33)$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_n & \mathbf{D}_f \end{bmatrix} = 5 \quad \text{dan} \quad \text{rank} \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{I}_n \end{bmatrix} = 4, \forall s \in \mathbb{C} \quad (3.34)$$

Persamaan (3.33) dan (3.34) menunjukkan bahwa Sistem Pendulum Kereta dengan kesalahan sensor pada sensor posisi pendulum (*angle encoder*) bersifat *observable*.

Error estimasi dari (3.32) dapat diperoleh dengan mengurangi persamaan (3.27) dengan (3.32):

$$\mathbf{e}_x = \sum_{i=1}^r m_i(x_2(t)) \{ \bar{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}} \} \quad (3.35)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_x = \sum_{i=1}^r m_i(x_2(t)) \{ (\bar{\mathbf{A}}_i - \bar{\mathbf{L}}_i \bar{\mathbf{C}}_o) \mathbf{e}_x + \mathbf{G} \mathbf{f}_s^q \} \quad (3.36)$$

Fungsi kestabilan Lyapunov untuk *error* estimasi *state* \mathbf{e}_x adalah

$$V(\mathbf{e}_x) = \mathbf{e}_x^T \bar{\mathbf{P}}_i \mathbf{e}_x \quad (3.37)$$

dengan $\bar{\mathbf{P}}$ merupakan matriks simetris definit positif. Turunan dari fungsi Lyapunov (3.37) dapat dituliskan dengan:

$$\dot{V}(\mathbf{e}_x) = \dot{\mathbf{e}}_x^T \bar{\mathbf{P}}_i \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_x^T \bar{\mathbf{P}}_i \dot{\mathbf{e}}_x \quad (3.38)$$

Dengan mensubstitusi (3.36) ke dalam (3.38) didapatkan turunan fungsi Lyapunov yang dituliskan dalam (3.39):

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{e}_x) &= \sum_{i=1}^r m_i(x_2(t)) [(\bar{\mathbf{A}}_i - \bar{\mathbf{L}}_i \bar{\mathbf{C}}_0) \mathbf{e}_x + \mathbf{G} \mathbf{f}_s^q]^T \bar{\mathbf{P}}_i \mathbf{e}_x \\ &\quad + \mathbf{e}_x^T \bar{\mathbf{P}}_i [(\bar{\mathbf{A}}_i - \bar{\mathbf{L}}_i \bar{\mathbf{C}}_0) \mathbf{e}_x + \mathbf{G} \mathbf{f}_s^q] \\ \dot{V}(\mathbf{e}_x) &= \sum_{i=1}^r m_i(x_2(t)) \left[\mathbf{e}_x^T ((\bar{\mathbf{A}}_i - \bar{\mathbf{L}}_i \bar{\mathbf{C}}_0)^T \bar{\mathbf{P}}_i + \bar{\mathbf{P}}_i (\bar{\mathbf{A}}_i - \bar{\mathbf{L}}_i \bar{\mathbf{C}}_0)) \mathbf{e}_x \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{f}_s^{qT} \mathbf{G}^T \bar{\mathbf{P}}_i \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_x^T \bar{\mathbf{P}}_i \mathbf{G} \mathbf{f}_s^q \right] \end{aligned} \quad (3.39)$$

3.5.3 Performa H_∞ PMI Observer

Berdasarkan Subbab 2.11, performa H_∞ digunakan untuk merancang kontroler yang kokoh terhadap gangguan dari luar. Pada subbab ini performa H_∞ juga diterapkan dalam tahapan desain PMI *Observer* agar *error* estimasi mampu kokoh terhadap adanya kesalahan sensor derivatif ke- q . Untuk menjamin sistem lup tertutup stabil asimtotis dan memenuhi performa H_∞ , maka dalam desain PMI *Observer* harus memenuhi pertidaksamaan berikut

$$\dot{V}(\mathbf{e}_x) + \frac{1}{\gamma_{pmi_i}} \mathbf{e}_x^T \mathbf{C}_p^T \mathbf{C}_p \mathbf{e}_x - \gamma_{pmi_i} \mathbf{f}_s^{qT} \mathbf{f}_s^q < 0 \quad (3.40)$$

dengan \mathbf{C}_p adalah matriks pembobot dengan dimensi bersesuaian, γ_{pmi_i} adalah level pelemahan \mathbf{f}_s^q pada \mathbf{e}_x . Dengan mensubstitusi (3.39) ke dalam (3.40) didapatkan pertidaksamaan berikut:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^r m_i(x_2(t)) \left[\mathbf{e}_x^T ((\bar{\mathbf{A}}_i - \bar{\mathbf{L}}_i \bar{\mathbf{C}}_0)^T \bar{\mathbf{P}}_i + \bar{\mathbf{P}}_i (\bar{\mathbf{A}}_i - \bar{\mathbf{L}}_i \bar{\mathbf{C}}_0)) \mathbf{e}_x + \mathbf{f}_s^{qT} \mathbf{G}^T \bar{\mathbf{P}}_i \mathbf{e}_x \right. \\
& \quad \left. + \mathbf{e}_x^T \bar{\mathbf{P}}_i \mathbf{G} \mathbf{f}_s^q + \frac{1}{\gamma_{pmi_i}} \mathbf{e}_x^T \mathbf{C}_p^T \mathbf{C}_p \mathbf{e}_x - \gamma_{pmi_i} \mathbf{f}_s^{qT} \mathbf{f}_s^q \right] < 0 \\
& \sum_{i=1}^r m_i(x_2(t)) \left[\mathbf{e}_x^T \left((\bar{\mathbf{A}}_i - \bar{\mathbf{L}}_i \bar{\mathbf{C}}_0)^T \bar{\mathbf{P}}_i + \bar{\mathbf{P}}_i (\bar{\mathbf{A}}_i - \bar{\mathbf{L}}_i \bar{\mathbf{C}}_0) + \frac{1}{\gamma_{pmi_i}} \mathbf{C}_p^T \mathbf{C}_p \right) \mathbf{e}_x \right. \\
& \quad \left. + \mathbf{f}_s^{qT} \mathbf{G}^T \bar{\mathbf{P}}_i \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_x^T \bar{\mathbf{P}}_i \mathbf{G} \mathbf{f}_s^q - \gamma_{pmi_i} \mathbf{f}_s^{qT} \mathbf{f}_s^q \right] < 0
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Pertidaksamaan (3.41) dapat ditulis ke dalam bentuk matriks

$$\sum_{i=1}^r m_i(x_2(t)) \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{f}_s^q \end{bmatrix}^T \Psi \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{f}_s^q \end{bmatrix} \right\} < 0 \tag{3.42}$$

dengan:

$$\Psi = \begin{bmatrix} (\bar{\mathbf{A}}_i - \bar{\mathbf{L}}_i \bar{\mathbf{C}}_0)^T \bar{\mathbf{P}}_i + \bar{\mathbf{P}}_i (\bar{\mathbf{A}}_i - \bar{\mathbf{L}}_i \bar{\mathbf{C}}_0) + \frac{1}{\gamma_{pmi_i}} \mathbf{C}_p^T \mathbf{C}_p & \bar{\mathbf{P}}_i \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T \bar{\mathbf{P}}_i & -\gamma_{pmi_i} \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

Pertidaksamaan (3.42) dapat bernilai < 0 dengan membuktikan bahwa $\Psi < 0$, sehingga (3.42) dapat dituliskan menjadi (3.43):

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_i^T \bar{\mathbf{P}}_i + \bar{\mathbf{P}}_i \bar{\mathbf{A}}_i - \bar{\mathbf{P}}_i \bar{\mathbf{L}}_i \bar{\mathbf{C}}_0 - \bar{\mathbf{C}}_0^T \bar{\mathbf{L}}_i^T \bar{\mathbf{P}}_i + \frac{1}{\gamma_{pmi_i}} \mathbf{C}_p^T \mathbf{C}_p & \bar{\mathbf{P}}_i \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T \bar{\mathbf{P}}_i & -\gamma_{pmi_i} \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \tag{3.43}$$

Objektif desain yaitu meminimumkan nilai γ_{pmi_i} dengan batasan $\bar{\mathbf{P}}_i > 0$ dan (3.43). Pada (3.43), matriks $\bar{\mathbf{P}}_i$, $\bar{\mathbf{L}}_i$, dan konstanta γ_{pmi_i} merupakan variabel yang nilainya dicari. Pertidaksamaan (3.43) disebut BMI (*Bilinear Matrix Inequality*) karena entri pertama dari matriks

mengandung perkalian dua matriks variabel yaitu $\bar{\mathbf{P}}_i \bar{\mathbf{L}}_i$ dan $\bar{\mathbf{L}}_i^T \bar{\mathbf{P}}_i$. Oleh karenanya perkalian langsung antara dua matriks variabel harus dihindari. Dimisalkan $\bar{\mathbf{H}}_i = \bar{\mathbf{P}}_i \bar{\mathbf{L}}_i$, dimana $\bar{\mathbf{H}}_i$ adalah matriks bantu, maka perkalian langsung dua matriks variabel dapat dihindari. Dengan mensubstitusi $\bar{\mathbf{H}}_i = \bar{\mathbf{P}}_i \bar{\mathbf{L}}_i$ ke dalam (3.43), didapatkan (3.44):

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_i^T \bar{\mathbf{P}}_i + \bar{\mathbf{P}}_i \bar{\mathbf{A}}_i - \bar{\mathbf{H}}_i \bar{\mathbf{C}}_o - \bar{\mathbf{C}}_o^T \bar{\mathbf{H}}_i^T + \frac{1}{\gamma_{pmi_i}} \mathbf{C}_p^T \mathbf{C}_p & \bar{\mathbf{P}}_i \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T \bar{\mathbf{P}}_i & -\gamma_{pmi_i} \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.44)$$

Dengan menerapkan *Schur Complement* pada (3.44) dapat diperoleh bentuk (3.45):

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_i^T \bar{\mathbf{P}}_i + \bar{\mathbf{P}}_i \bar{\mathbf{A}}_i - \bar{\mathbf{H}}_i \bar{\mathbf{C}}_o - \bar{\mathbf{C}}_o^T \bar{\mathbf{H}}_i^T & \bar{\mathbf{P}}_i \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T \bar{\mathbf{P}}_i & -\gamma_{pmi_i} \mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_p^T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \frac{1}{\gamma_{pmi_i}} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_p & \mathbf{0} \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_i^T \bar{\mathbf{P}}_i + \bar{\mathbf{P}}_i \bar{\mathbf{A}}_i - \bar{\mathbf{H}}_i \bar{\mathbf{C}}_o - \bar{\mathbf{C}}_o^T \bar{\mathbf{H}}_i^T & \bar{\mathbf{P}}_i \mathbf{G} & \mathbf{C}_p^T \\ \mathbf{G}^T \bar{\mathbf{P}}_i & -\gamma_{pmi_i} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_p & \mathbf{0} & -\gamma_{pmi_i} \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.45)$$

Pembahasan performa H_∞ pada PMI *Observer* dapat dirangkum menjadi suatu teorema berikut:

Teorema 3.2. PMI *Observer* mampu melemahkan pengaruh \mathbf{f}_s^q pada *error* estimasi *state* augmentasi apabila terdapat matriks $\bar{\mathbf{P}}_i$ simetris positif definit dan matriks $\bar{\mathbf{H}}_i$ yang meminimalkan γ_{pmi_i} dengan memenuhi batasan LMI (3.45) atau dapat dituliskan dengan:

$$\begin{aligned} & \min \gamma_{pmi_i} \\ & \text{s.t. } \bar{\mathbf{P}}_i > 0 \\ & \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_i^T \bar{\mathbf{P}}_i + \bar{\mathbf{P}}_i \bar{\mathbf{A}}_i - \bar{\mathbf{H}}_i \bar{\mathbf{C}}_o - \bar{\mathbf{C}}_o^T \bar{\mathbf{H}}_i^T & \bar{\mathbf{P}}_i \mathbf{G} & \mathbf{C}_p^T \\ \mathbf{G}^T \bar{\mathbf{P}}_i & -\gamma_{pmi_i} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_p & \mathbf{0} & -\gamma_{pmi_i} \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \end{aligned}$$

3.5.4 Pole Placement PMI Observer pada LMI Region

Selain syarat stabilitas (analisa Lyapunov) dan kekokohan terhadap efek \mathbf{f}_s^q pada *error* estimasi *state* augmentasi, estimasi *state* augmentasi yang cepat dan *overshoot* seminimal mungkin menjadi tujuan dalam desain PMI Observer. Hal ini bisa dicapai dengan meletakkan *pole* PMI Observer jauh di sebelah kiri sumbu imajiner dengan bagian imajiner didesain agar memenuhi spesifikasi desain *maximum overshoot*. Seperti yang telah dijelaskan pada Subbab 2.12, ada tiga bentuk LMI region yang dapat digunakan untuk meletakkan *pole* PMI Observer yaitu *half plane*, kerucut, dan lingkaran. Dalam Tugas Akhir ini, LMI region yang dipilih adalah irisan antara *half plane* dan kerucut seperti yang tertera pada Gambar 2.15.

LMI region PMI Observer pada daerah *half plane* dan kerucut dapat ditulis sebagai berikut:

1. Half plane

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{P}}_i &> 0 \\ \bar{\mathbf{A}}_i^T \bar{\mathbf{P}}_i + \bar{\mathbf{P}}_i \bar{\mathbf{A}}_i - \bar{\mathbf{H}}_i \bar{\mathbf{C}}_0 - \bar{\mathbf{C}}_0^T \bar{\mathbf{H}}_i^T + 2\gamma_{obs} \bar{\mathbf{P}}_i &< 0 \end{aligned} \quad (3.46)$$

2. Kerucut

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathbf{P}}_i &> 0 \\ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^T & \alpha \end{bmatrix} &< 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.47)$$

dengan:

$$\begin{aligned} \alpha &= \sin \theta_{obs} \left(\bar{\mathbf{A}}_i^T \bar{\mathbf{P}}_i + \bar{\mathbf{P}}_i \bar{\mathbf{A}}_i - \bar{\mathbf{H}}_i \bar{\mathbf{C}}_0 - \bar{\mathbf{C}}_0^T \bar{\mathbf{H}}_i^T \right) \\ \beta &= \cos \theta_{obs} \left(-\bar{\mathbf{A}}_i^T \bar{\mathbf{P}}_i + \bar{\mathbf{P}}_i \bar{\mathbf{A}}_i - \bar{\mathbf{H}}_i \bar{\mathbf{C}}_0 + \bar{\mathbf{C}}_0^T \bar{\mathbf{H}}_i^T \right) \end{aligned}$$

dengan $-\gamma_{obs}$ adalah nilai *pole* PMI Observer terbesar dan θ_{obs} adalah sudut antara sisi miring kerucut dengan sumbu $Re(z)$.

3.5.5 Gain PMI Observer Hasil Desain

Berdasarkan Subsubbab 3.5.3 dan 3.5.4, maka Teorema 3.2 dapat diperluas menjadi Teorema 3.3

Teorema 3.3. PMI *Observer* mampu mengestimasi *state* augmentasi secara simultan sekaligus melemahkan pengaruh \mathbf{f}_s^q pada *error* estimasi *state* augmentasi apabila terdapat matriks $\bar{\mathbf{P}}_i$ simetris positif definit dan matriks $\bar{\mathbf{H}}_i$ yang meminimalkan γ_{pmi_i} dengan memenuhi batasan LMI (3.45)-(3.47) atau dapat dituliskan dengan

$$\begin{aligned} \min \quad & \gamma_{pmi_i} \\ \text{s.t.} \quad & 1. \quad \bar{\mathbf{P}}_i > 0 \\ & 2. \quad \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_i^T \bar{\mathbf{P}}_i + \bar{\mathbf{P}}_i \bar{\mathbf{A}}_i - \bar{\mathbf{H}}_i \bar{\mathbf{C}}_o - \bar{\mathbf{C}}_o^T \bar{\mathbf{H}}_i^T & \bar{\mathbf{P}}_i \mathbf{G} & \mathbf{C}_p^T \\ \mathbf{G}^T \bar{\mathbf{P}}_i & -\gamma_{pmi} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_p & \mathbf{0} & -\gamma_{pmi} \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \\ & 3. \quad \bar{\mathbf{A}}_i^T \bar{\mathbf{P}}_i + \bar{\mathbf{P}}_i \bar{\mathbf{A}}_i - \bar{\mathbf{H}}_i \bar{\mathbf{C}}_o - \bar{\mathbf{C}}_o^T \bar{\mathbf{H}}_i^T + 2\gamma_{obs} \bar{\mathbf{P}}_i < 0 \\ & 4. \quad \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^T & \alpha \end{bmatrix} < 0 \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned} \alpha &= \sin \theta_{obs} \left(\bar{\mathbf{A}}_i^T \bar{\mathbf{P}}_i + \bar{\mathbf{P}}_i \bar{\mathbf{A}}_i - \bar{\mathbf{H}}_i \bar{\mathbf{C}}_o - \bar{\mathbf{C}}_o^T \bar{\mathbf{H}}_i^T \right) \\ \beta &= \cos \theta_{obs} \left(-\bar{\mathbf{A}}_i^T \bar{\mathbf{P}}_i + \bar{\mathbf{P}}_i \bar{\mathbf{A}}_i - \bar{\mathbf{H}}_i \bar{\mathbf{C}}_o + \bar{\mathbf{C}}_o^T \bar{\mathbf{H}}_i^T \right) \end{aligned}$$

Nilai *gain* PMI *Observer* dapat dicari menggunakan dengan LMI *toolbox* pada *software* Matlab. Dengan memberikan nilai $\gamma_{obs} = 250$, $\theta_{obs} = 37^\circ$, dan $\mathbf{C}_p = 0,435\mathbf{I}_{6 \times 6}$ didapatkan matriks *gain* PMI *Observer* $\bar{\mathbf{L}}_1$ dan $\bar{\mathbf{L}}_2$, serta level pelemahan γ_{pmi_1} dan γ_{pmi_2} sebagai berikut:

$$\bar{\mathbf{L}}_1 = 1 \times 10^5 \begin{bmatrix} 0,0036 & -0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ -0,0000 & -0,0039 & 0,0046 & 0,2727 \\ 0,0000 & -0,0000 & 0,0036 & 0,0002 \\ -0,0000 & -0,0002 & 0,0002 & 0,0155 \\ 0,0000 & 4,6756 & -0,0028 & -0,1660 \\ 0,0000 & 0,0210 & -0,0046 & -0,2730 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_2 = 1 \times 10^5 \begin{bmatrix} 0,0036 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ -0,0000 & -0,0069 & 0,0043 & 0,2854 \\ 0,0000 & -0,0000 & 0,0036 & 0,0002 \\ -0,0000 & -0,0004 & 0,0002 & 0,0157 \\ 0,0000 & 4,5999 & -0,0036 & -0,2384 \\ 0,0000 & 0,0238 & -0,0043 & -0,2860 \end{bmatrix}$$

$$\gamma_{pmi_1} = 0,0024 \quad \gamma_{pmi_2} = 0,0021$$

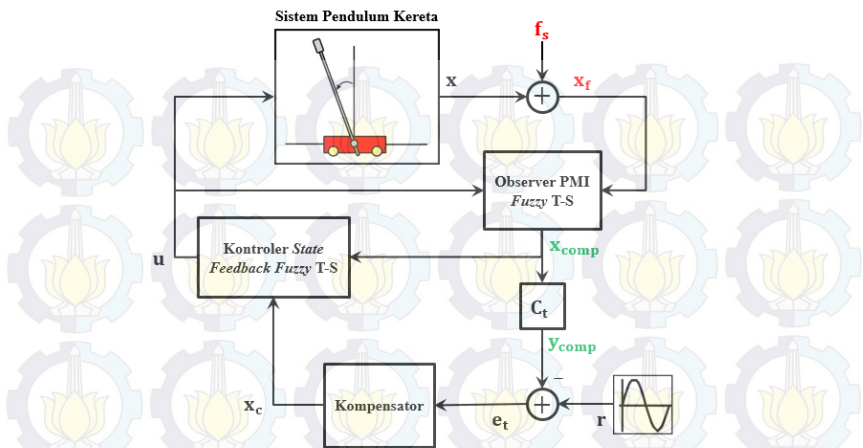
3.6 Diagram Simulink untuk Simulasi dan Implementasi

Keseluruhan hasil rancangan dapat disusun menjadi sebuah diagram blok sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 3.4. Berdasarkan Gambar 3.4 maka dapat disusun diagram Simulink untuk simulasi dan implementasi seperti yang ditunjukkan pada Gambar 3.5 dan Gambar 3.6. Blok kesalahan berisi beberapa macam jenis kesalahan yaitu *bias faults*, *loss of sensitivity*, *loss of measurement*, dan *stuck sensor reading*. Kesalahan tersebut dimodifikasi sedemikian rupa sehingga dapat dimodelkan menjadi *additive faults* yang mempengaruhi *state* sistem. Hasil dari operasi penambahan kesalahan pada *state* sistem disebut dengan *state* sistem *faulty* (\mathbf{x}_f).

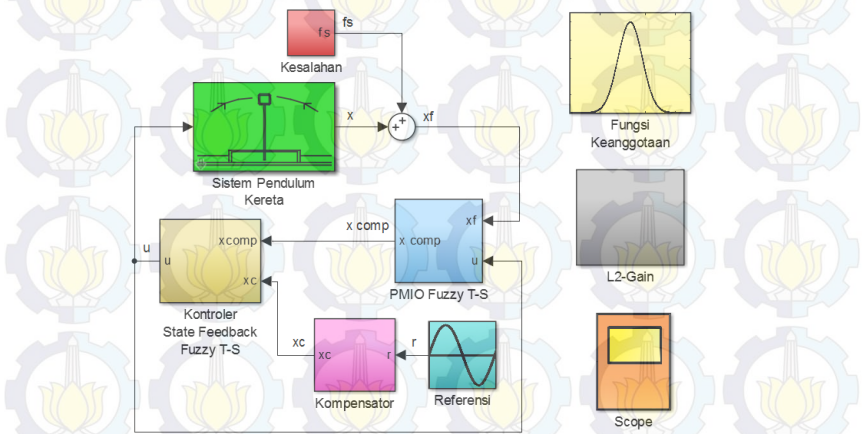
State sistem *faulty* akan menjadi masukan pada blok *observer*. Selain *state* sistem *faulty*, masukan blok *observer* adalah sinyal kontrol, sedangkan keluarannya berupa *state* Sistem Pendulum Kereta yang telah dikompensasi (\mathbf{x}_{comp}). Dengan menggunakan aturan *fuzzy*, maka tiap model linear *observer* akan diberi bobot berdasarkan derajat keanggotaannya dan akan mengestimasi *state* sistem dan kesalahan sensor.

Sinyal referensi berupa sinyal sinusoidal dengan $A = 0,1$ m dan $f = 0,1$ Hz dibangkitkan pada blok referensi. Sinyal referensi nantinya akan digunakan sebagai masukan pada blok kompensator untuk dibandingkan nilainya dengan posisi kereta.

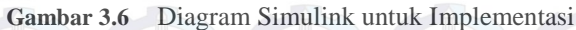
Perbedaan antara sinyal referensi dengan posisi kereta disebut dengan *error tracking* (e_t). *Error tracking* akan digunakan sebagai masukan pada persamaan *state* kompensator dan keluarannya adalah *state* kompensator (\mathbf{x}_c). Persamaan *state* kompensator didapat dari transformasi Laplace pada sinyal referensi, yaitu sinyal sinusoidal dengan $A = 0,1$ m dan $f = 0,1$ Hz.



Gambar 3.4 Skenario *Fault Tolerant Control (FTC)* Hasil Perancangan



Gambar 3.5 Diagram Simulink untuk Simulasi



Posisi pendulum sebagai variabel premis digunakan untuk menentukan derajat keanggotaan tiap model. Proses penghitungan nilai derajat keanggotaan dilakukan pada Blok Fungsi Keanggotaan. Jenis fungsi keanggotaan yang dipilih adalah *Triangular* dan *Trapezoidal* untuk aturan 1 dan aturan 2.

59

Perbedaan antara diagram simulink untuk simulasi dan implementasi terletak pada blok *Rail limiter*, DAC, *Switch*, dan *Filter*. Blok *Rail limiter* digunakan untuk membatasi posisi kereta pada rentang nilai -0,4 m hingga 0,4 m. Blok DAC digunakan untuk konversi sinyal kontrol dalam satuan Newton menjadi satuan Volt (diasumsikan linear) dengan rumus $V = 1/9u$. DAC yang digunakan bekerja pada $\pm 2,5$ Volt. Oleh karena itu, tegangan yang digunakan dibatasi pada $\pm 1,9$ Volt. Blok *Switch* digunakan untuk mengaktifkan kontroler saat pendulum memasuki zona stabilisasi, dan blok *Filter* digunakan untuk menghilangkan *noise* kecepatan kereta dan kecepatan pendulum yang diperoleh dari turunan *position encoder* dan *angle encoder*.

BAB 4

PENGUJIAN DAN ANALISIS DATA

Pada bab ini akan dibahas mengenai hasil pengujian simulasi dan implementasi sistem kontrol *tracking* toleransi kesalahan pada Sistem Pendulum Kereta. Parameter Sistem Pendulum Kereta, kontroler, dan *observer* didapatkan dari hasil perancangan pada Bab 3. Pengujian dilakukan dengan memberikan kesalahan berupa bias, *loss of sensitivity*, *loss of measurement*, dan *stuck sensor reading* pada posisi pendulum.

4.1 Hasil Simulasi

Pengujian hasil perancangan pada Bab 3 dilakukan dengan diagram Simulink yang tertera pada Gambar 3.3. Berdasarkan hasil perancangan pada Bab 3, didapatkan *eigen value* sistem lup tertutup dan *observer* sebagai berikut:

Tabel 4.1 Perbandingan *Eigen Value* Sistem dan *Observer*

<i>Eigen Value</i> Sistem		<i>Eigen Value</i> Observer	
Subsistem 1	Subsistem 2	Subsistem 1	Subsistem 2
$-0,876 + 0,453i$	$-0,873 + 0,454i$	$-339,5 + 0,002i$	-336,00
$-0,876 - 0,453i$	$-0,873 - 0,454i$	$-339,5 - 0,002i$	-340,10
-0,9400	-0,93800	-357,10	-356,80
-2,9160	-2,90900	-357,10	-356,80
-3,8820	-3,81260	-1213,4	-1221,1
-16,693	-16,3841	-1371,0	-1363,3

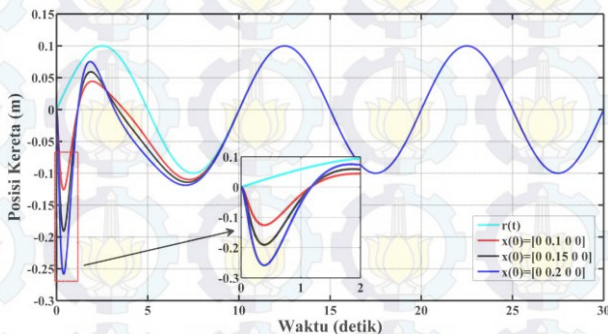
Berdasarkan Tabel 4.1 terlihat bahwa *eigen value* sistem lup tertutup dan *observer* memiliki bagian *real* yang negatif sehingga hasil perancangan pada Bab 3 dapat menjamin kestabilan sistem.

Hasil simulasi pada keadaan nominal dengan variasi *initial condition* akan ditunjukkan pada Subsubbab 4.1.1, dan pengujian terhadap *bias faults*, *loss of sensitivity*, *loss of measurement*, dan *stuck sensor reading* akan dibahas pada Subsubbab 4.1.2-4.1.5. Selanjutnya hasil implementasi akan dibahas pada Subbab 4.2. Pertama-tama akan diuji saat keadaan nominal dan kemudian akan diuji dengan kesalahan sensor berupa *bias faults* dan *loss of measurement*.

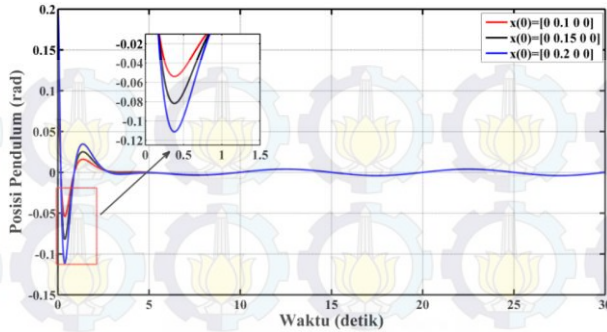
4.1.1 Keadaan Nominal (*Fault Free Case*)

Hasil simulasi posisi kereta saat keadaan nominal ditunjukkan pada Gambar 4.1. Dari gambar tersebut terlihat bahwa terjadi *undershoot* sesaat setelah $t = 0$ detik. *Undershoot* paling besar terjadi pada posisi kereta dengan *initial condition* posisi pendulum sebesar 0,2 rad yakni 0,258 m. Waktu yang dibutuhkan kereta untuk mengikuti sinyal referensi yakni sekitar 9,442 s. *Integral Absolute Error* (IAE) digunakan sebagai ukuran performa *tracking* posisi kereta terhadap sinyal referensi. Semakin kecil nilai IAE maka semakin baik performa yang diberikan posisi kereta. Nilai IAE untuk posisi kereta dengan *initial condition* 0,1 rad; 0,15 rad; dan 0,2 rad secara berturut-turut adalah 0,4345 m-detik; 0,5133 m-detik; dan; 0,5955 m-detik. Dengan nilai IAE yang kecil, performa yang diberikan posisi kereta dalam mengikuti sinyal referensi dapat dikatakan baik.

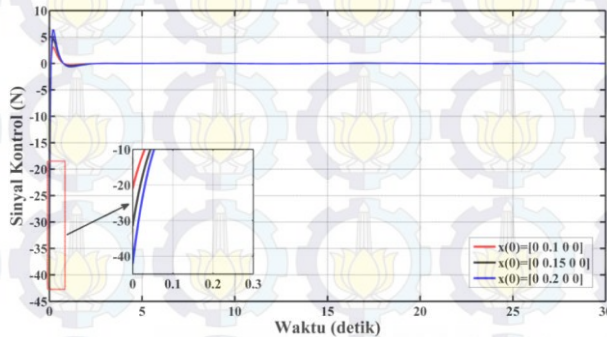
Respon posisi pendulum dapat dilihat pada Gambar 4.2. Sama seperti respon posisi kereta, posisi pendulum sempat mengalami *undershoot* pada saat transien yang besarnya bergantung pada besar *initial condition* yang diberikan. Waktu yang dibutuhkan pendulum untuk bertahan pada posisi terbaliknya yaitu sekitar 4,634 detik. *Initial condition* pada posisi pendulum juga mempengaruhi besarnya sinyal kontrol pada kondisi awal. Nilai absolut sinyal kontrol terbesar yakni bernilai 42,1399 N. Sinyal kontrol dapat dilihat pada Gambar 4.3.



Gambar 4.1 Respon Posisi Kereta dengan Berbagai *Initial Condition* pada Posisi Pendulum

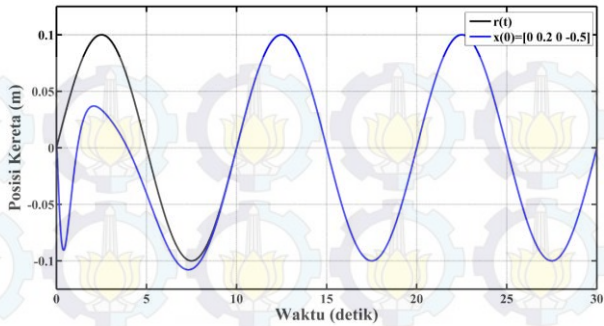


Gambar 4.2 Respon Posisi Pendulum dengan Berbagai *Initial Condition* pada Posisi Pendulum

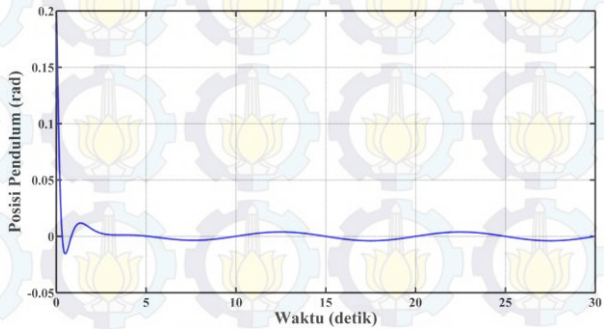


Gambar 4.3 Sinyal Kontrol dengan Berbagai *Initial Condition* pada Posisi Pendulum

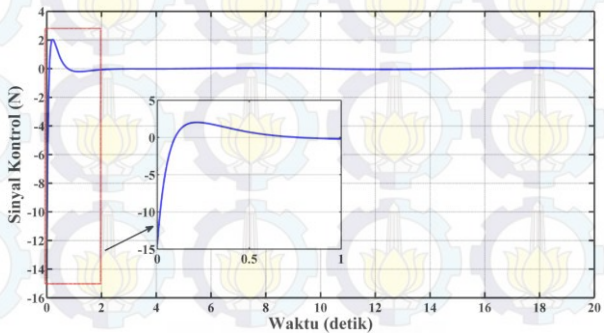
Untuk mengurangi nilai sinyal kontrol pada kondisi awal, maka diberikan nilai pada *initial condition* kecepatan pendulum yang arahnya berlawanan dengan arah jatuh pendulum. Respon posisi kereta, posisi pendulum, dan sinyal kontrol dengan *initial condition* pada posisi pendulum dan kecepatan pendulum digambarkan secara berturut-turut pada Gambar 4.4-4.6. Terlihat pada Gambar 4.4 bahwa posisi kereta dengan *initial condition* pada kecepatan pendulum memiliki nilai *undershoot* yang lebih kecil daripada posisi kereta tanpa *initial condition* pada kecepatan pendulum.



Gambar 4.4 Respon Posisi Kereta dengan *Initial Condition* pada Posisi Pendulum dan Kecepatan Pendulum



Gambar 4.5 Respon Posisi Pendulum dengan *Initial Condition* pada Posisi Pendulum dan Kecepatan Pendulum



Gambar 4.6 Sinyal Kontrol dengan *Initial Condition* pada Posisi Pendulum dan Kecepatan Pendulum

Dengan pemberian *initial condition* pada kecepatan pendulum mengakibatkan posisi pendulum terdorong untuk segera menuju posisi terbaliknya (0 rad), oleh karenanya nilai *undershoot* dari posisi pendulum mengecil dan sinyal kontrol yang digunakan untuk mendorong kereta menjadi mengecil pula. Secara keseluruhan performa nominal sistem dapat dikatakan baik dalam mengikuti sinyal referensi.

Dari penjelasan-penjelasan di atas maka karakteristik respon saat keadaan nominal dapat dituliskan secara ringkas ke dalam Tabel 4.2:

Tabel 4.2 Karakteristik Respon Sistem Saat Keadaan Nominal

<i>Initial Condition</i>	x_1		x_2	u
	<i>Maximum Undershoot</i> (m)	IAE (m·detik)	<i>Maximum Undershoot</i> (rad)	Nilai Absolut Maksimal (N)
x_2 0,1 rad	0,1259	0,4345	0,054	20,9807
$x_2 = 0,15$ rad	0,1908	0,5133	0,082	31,5380
$x_2 = 0,2$ rad	0,2584	0,5955	0,111	42,1399
$x_2 = 0,2$ rad dan $x_4 = -0,5$ rad/detik	0,1079	0,3916	0,015	14,3316

4.1.2 Pengujian *Bias Sensor Faults* ($\alpha_i = 1$ dan $\beta_i \neq 0$)

Kesalahan bias terjadi pada sensor posisi pendulum. Diasumsikan kesalahan bias sebesar 0,025 rad pada $t \geq 10$ detik dengan penulisan notasi matematika sebagai berikut:

$$x_{2f} = x_2 + \beta_2$$

$$\beta_2 = \begin{cases} 0 & \text{rad ; } 0 \leq t < 10 \text{ detik} \\ 0,025 & \text{rad ; } t \geq 10 \text{ detik} \end{cases}$$

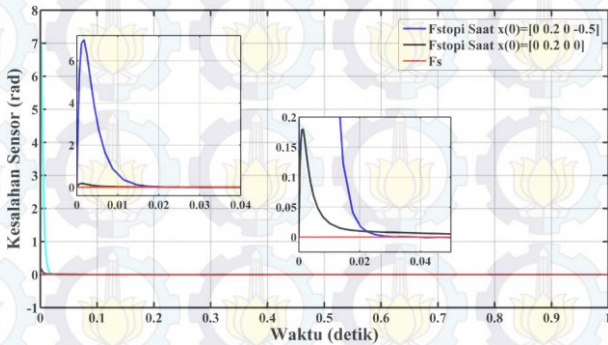
Berdasarkan (2.12) kesalahan bias dapat dimodelkan menjadi *additive fault* yang dituliskan dengan

$$f_{s_2} = (\alpha_2 - 1)x_2 + \beta_2$$

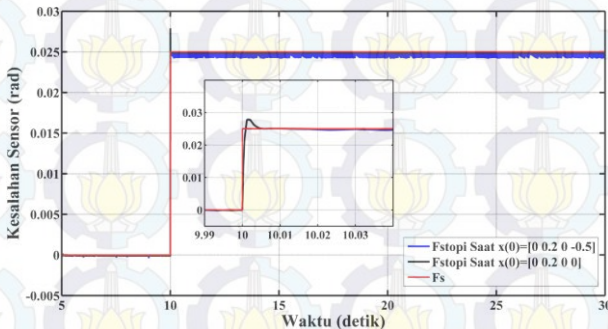
$$f_{s_2} = \beta_2$$

Kesalahan bias dan estimasinya ditunjukkan pada Gambar 4.7 dan Gambar 4.8

Initial condition dari *observer* diberi nilai $\hat{x}(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$. Terlihat pada Gambar 4.7 bahwa semakin besar perbedaan nilai *initial condition* dari *plant* dan *observer*, maka akan terjadi *error* estimasi kesalahan yang sangat besar pada waktu awal simulasi. Pada detik kesepuluh, estimasi kesalahan dan nilai aktualnya memiliki perbedaan yang relatif kecil yaitu sekitar 5×10^{-5} rad. Hal ini menyebabkan estimasi kesalahan dapat dilakukan sangat cepat walaupun kesalahannya terjadi secara cepat (*abrupt fault*). Karakteristik estimasi kesalahan bias dapat dilihat pada Tabel 4.3.



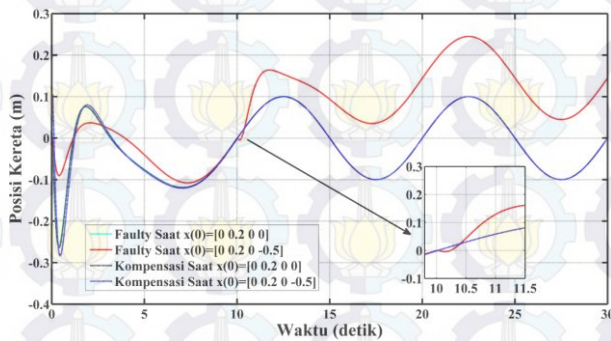
Gambar 4.7 Bias Sensor Fault dan Estimasinya Saat $0 \leq t \leq 1$ detik



Gambar 4.8 Bias Sensor Fault dan Estimasinya Saat $5 \leq t \leq 30$ detik

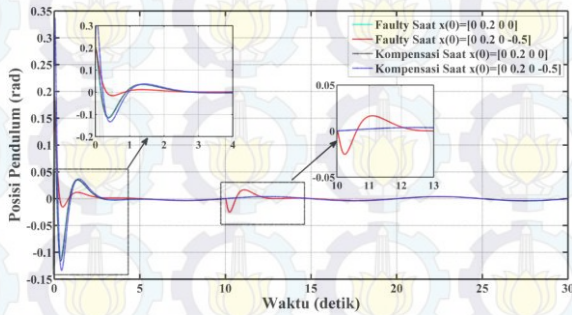
Tabel 4.3 Karakteristik Estimasi Kesalahan Bias

Initial Condition	$0 \leq t \leq 0,1$ detik		$10 \leq t \leq 10,1$ detik		IAE (rad·detik)
	Overshoot (rad)	t_s (2%) (detik)	Overshoot (rad)	t_s (2%) (detik)	
x_2 0,1 rad	0,0841	0,0081	0,0016	0,0068	0,00154
x_2 0,2 rad	0,168	0,0081	0,0017	0,0078	0,00297
x_2 0,2 rad dan $x_4 = -0,5$ rad/detik	7,201	0,0842	0,0017	0,0084	0,03985

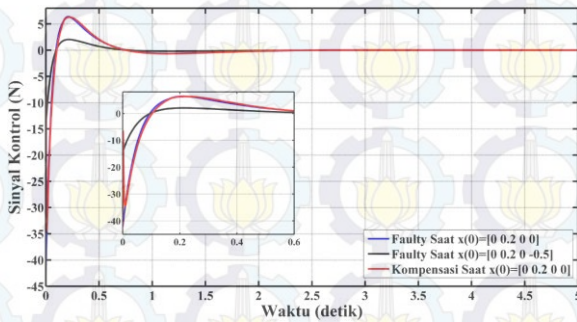
**Gambar 4.9** Respon Posisi Kereta *Faulty* dan Kompensasi

Respon posisi kereta saat terjadi kesalahan dan dikompensasi dengan FTC ditunjukkan pada Gambar 4.9. Dapat dilihat pada gambar bahwa saat terjadi kesalahan bias pada $t \geq 10$ detik, posisi kereta tanpa kompensasi FTC mengalami *undershoot* selama 0,4 detik dan kemudian berosilasi pada 0,14 m. Bentuk respon posisi kereta dengan kompensasi FTC saat $t \geq 10$ detik memiliki karakteristik hampir sama dengan keadaan nominal. Namun saat kondisi awal, respon posisi kereta mengalami *undershoot* sebesar 0,0058 m untuk kondisi awal posisi pendulum 0,2 rad. Sementara untuk kondisi awal posisi pendulum 0,2 rad dan kecepatan sudutnya -0,5 rad/detik, respon posisi kereta mengalami *undershoot* sebesar 0,19276 m. Sama halnya dengan respon posisi kereta, respon posisi pendulum (Gambar 4.10) tanpa kompensasi FTC mengalami *undershoot* pada $t = 10$ detik sebesar 0,02505 rad, sedangkan saat dikompensasi dengan FTC, posisi pendulum memiliki respon yang serupa dengan kondisi nominal. Namun, respon posisi pendulum sempat mengalami *undershoot* pada saat $t = 0,45$ detik sebesar 0,0049 rad untuk

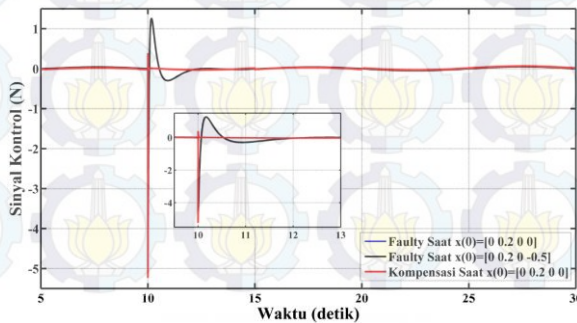
kondisi awal posisi pendulum 0,2 rad dan 0,1085 rad untuk kondisi awal posisi pendulum sebesar 0,2 rad dan kecepatan sudutnya sebesar -0,5 rad/detik.



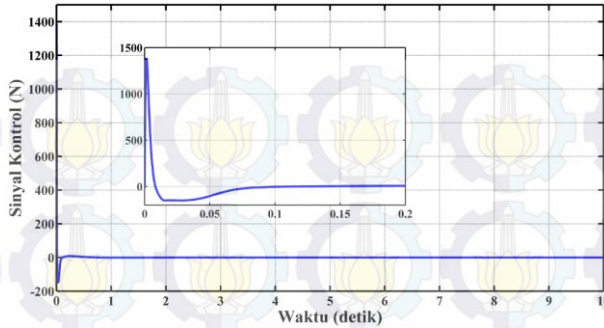
Gambar 4.10 Respon Posisi Pendulum *Faulty* dan Kompensasi



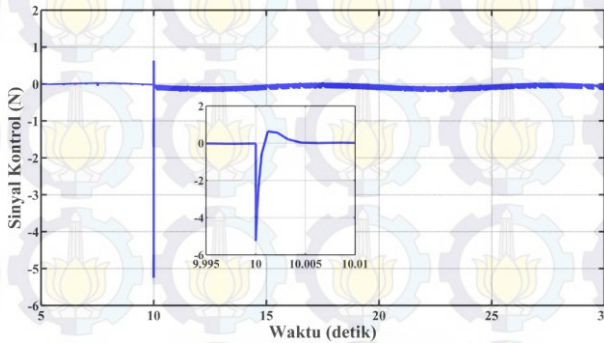
Gambar 4.11 Sinyal Kontrol Saat $0 \leq t \leq 5$ detik



Gambar 4.12 Sinyal Kontrol Saat $5 \leq t \leq 30$ detik



Gambar 4.13 Sinyal Kontrol Kompensasi dengan *Initial Condition* $x_2 = 0,2$ rad dan $x_4 = -0,5$ rad/detik Saat $0 \leq t \leq 10$ detik



Gambar 4.14 Sinyal Kontrol Kompensasi dengan *Initial Condition* $x_2 = 0,2$ rad dan $x_4 = -0,5$ rad/detik Saat $5 \leq t \leq 30$ detik

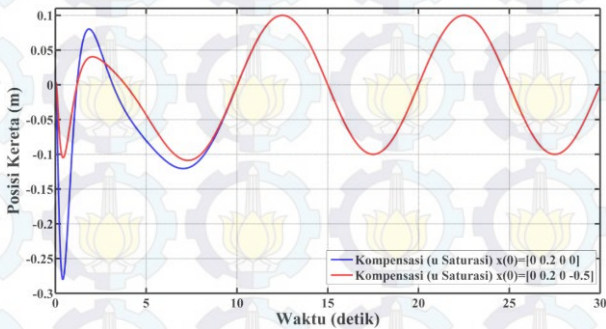
Sinyal kontrol saat *faulty* dan kompensasi ditunjukkan pada Gambar 4.11-4.14. Pada Gambar 4.11 dan Gambar 4.13 terlihat bahwa sinyal kontrol saat kompensasi mengalami *overshoot* dan *undershoot*. Besarnya nilai *overshoot* dan *undershoot* tergantung pada besarnya perbedaan *initial condition plant* dan *observer* bahwa semakin besar perbedaan *initial condition* dari *plant* dan *observer* maka semakin besar sinyal kontrol kompensasi yang dihasilkan oleh kontroler. Besarnya *overshoot* sinyal kontrol untuk kondisi awal posisi pendulum $0,2$ rad dan kecepatan sudut $-0,5$ rad/detik adalah 1412 N, sedangkan untuk kondisi awal posisi pendulum $0,2$ rad, sinyal kontrol mengalami *undershoot* sebesar $-34,5$ N. Karena sinyal kontrol kompensasi dengan FTC memiliki nilai hingga ribuan Newton maka sinyal kontrol dibatasi dengan nilai absolut sebesar

17,1 N. Sinyal kontrol yang telah dibatasi dan pengaruhnya pada respon posisi kereta serta posisi pendulum ditunjukkan pada Gambar 4.15 dan Gambar 4.16. Sementara nilai L_2 -Gain simulasi ditunjukkan pada Gambar 4.17. Nilai L_2 -Gain hasil simulasi masih berada di bawah level pelemahan $\gamma_{pmi_1} = 0,0024$ dan $\gamma_{pmi_2} = 0,0021$. Perbedaan nilai IAE *error tracking* dari posisi kereta terhadap sinyal referensi dapat dilihat pada Tabel 4.4:

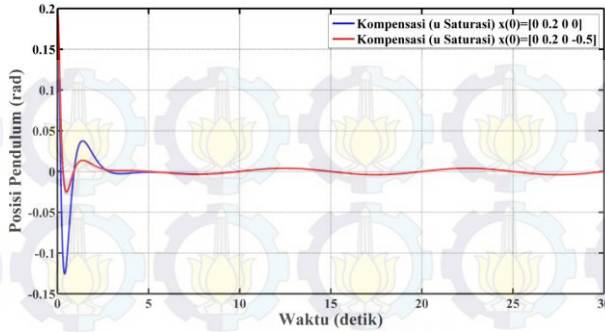
Tabel 4.4 Perbandingan IAE *Tracking* Sinyal Referensi

Initial Condition	IAE (m·detik)			
	Nominal	Faulty	Kompensasi	Kompensasi dengan Sinyal Kontrol Dibatasi
x_2 0,2 rad	0,5955	2,988	0,5985	0,6183
x_2 0,2 rad dan x_4 -0,5 rad/detik	0,3916	2,785	0,6165	0,4073

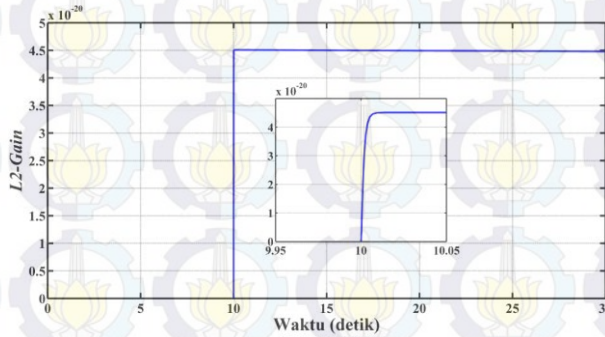
Secara keseluruhan, FTC hasil perancangan mampu mengembalikan performa sistem kembali ke kondisi nominal secara cepat walaupun terjadi kesalahan bias. Hal tersebut dibuktikan dengan nilai IAE hasil kompensasi mendekati nilai IAE pada kondisi nominal serta nilai L_2 -Gain yang masih berada di bawah level pelemahan γ_{pmi_1} dan γ_{pmi_2} .



Gambar 4.15 Respon Posisi Kereta dengan Sinyal Kontrol Dibatasi



Gambar 4.16 Respon Posisi Pendulum dengan Sinyal Kontrol Dibatasi



Gambar 4.17 L_2 -Gain Simulasi Saat Terjadi Kesalahan Bias

4.1.3 Pengujian *Loss of Sensitivity* ($0 \leq \alpha_i \leq 1$ dan $\beta_i = 0$)

Diasumsikan sensor posisi pendulum yang digunakan untuk mengukur posisi pendulum mengalami *loss of sensitivity* sebesar 30%, 40%, dan 50% untuk kondisi satu, kondisi dua, dan kondisi tiga. *Loss of sensitivity* tersebut terjadi pada detik ke-1. Penulisan *loss of sensitivity* untuk ketiga kondisi di atas dapat dituliskan dalam notasi matematika sebagai berikut:

$$x_{2f} = \alpha_2 x_2$$

$$\begin{aligned} \textbf{Kondisi 1} \quad x_{2f} &= \begin{cases} x_2 & ; \quad 0 \leq t < 1 \text{ detik} \\ 0,7x_2 & ; \quad t \geq 1 \text{ detik} \end{cases} \\ \textbf{Kondisi 2} \quad x_{2f} &= \begin{cases} x_2 & ; \quad 0 \leq t < 1 \text{ detik} \\ 0,6x_2 & ; \quad t \geq 1 \text{ detik} \end{cases} \\ \textbf{Kondisi 3} \quad x_{2f} &= \begin{cases} x_2 & ; \quad 0 \leq t < 1 \text{ detik} \\ 0,5x_2 & ; \quad t \geq 1 \text{ detik} \end{cases} \end{aligned}$$

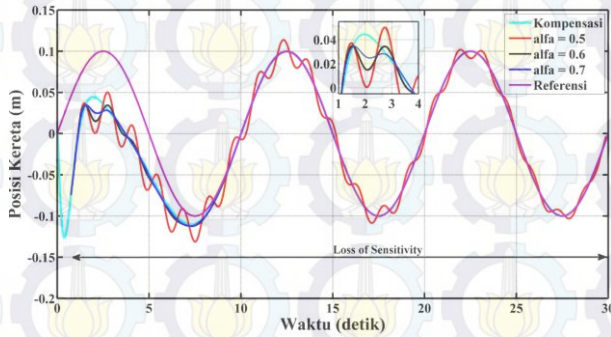
Berdasarkan (2.12) *loss of sensitivity* dapat dimodelkan menjadi *additive fault* yang dituliskan dengan:

$$\begin{aligned} f_{s_2} &= (\alpha_2 - 1)x_2 + \beta_2 \\ f_{s_2} &= (\alpha_2 - 1)x_2 \end{aligned}$$

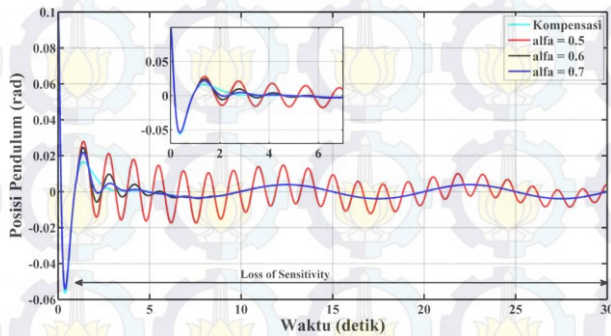
Pengujian *Loss of sensitivity* dilakukan dengan memberikan kondisi awal pada posisi pendulum sebesar 0,1 rad. Pengaruh *Loss of sensitivity* sensor posisi pendulum pada respon posisi kereta ditunjukkan pada Gambar 4.18. Dari gambar tersebut dapat dilihat bahwa semakin besar penurunan sensitivitas dari sensor posisi pendulum maka semakin besar penurunan performa *tracking* dari posisi kereta. Dengan penurunan sensitivitas sebesar 50% mengakibatkan posisi pendulum mengalami *ripple*. Nilai *ripple* paling besar yaitu 0,02068 m dan terjadi pada saat $t = 2,739$ detik, selang 1,739 detik dari terjadinya penurunan sensitivitas sensor. Besarnya *ripple* lama kelamaan berkurang seiring dengan bertambahnya waktu. Dengan waktu simulasi selama 30 detik, respon posisi kereta masih belum bisa kembali ke keadaan nominalnya. Begitu juga halnya dengan penurunan sensitivitas sebesar 40%, respon posisi kereta mengalami *ripple*, namun tidak sebesar saat penurunan sensitivitas 50%. Respon posisi kereta juga dapat kembali ke keadaan nominal dalam selang waktu 8,4 detik dari terjadinya penurunan sensitivitas. Berbeda halnya dengan penurunan sensitivitas 30%, respon posisi kereta mengalami *ripple* maksimum yang relatif kecil, yakni 0,00012 m dan hanya membutuhkan waktu 3,5 detik sejak terjadinya penurunan sensitivitas untuk kembali ke keadaan nominal. Perbandingan karakteristik respon posisi kereta saat *faulty* dan dengan kompensasi ditunjukkan pada Tabel 4.5.

Respon posisi pendulum dan sinyal kontrol diperlihatkan pada Gambar 4.19 dan Gambar 4.20. Respon posisi pendulum tanpa kompensasi juga mengalami *ripple* yang besarnya bergantung dari penurunan sensitivitas dari sensor, yakni semakin besar penurunan sensitivitas sensor maka semakin besar nilai *ripple*-nya dan juga semakin lama waktu yang dibutuhkan untuk kembali ke keadaan nominal. Sinyal kontrol kompensasi mengalami *undershoot* yang besarnya bergantung pada besar penurunan sensitivitas. Semakin besar penurunan sensitivitas, maka semakin besar nilai *undershoot*. Estimasi kesalahan sensor diperlihatkan pada Gambar 4.21. Sebagaimana tertera pada gambar tersebut bahwa *PMI Observer* mampu mengestimasi penurunan

sensitivitas yang dimodelkan menjadi *additive fault* dengan $f_{s_2} = (\alpha_2 - 1)x_2$. Nilai pelemahan L_2 -Gain ditunjukkan pada Gambar 4.22.



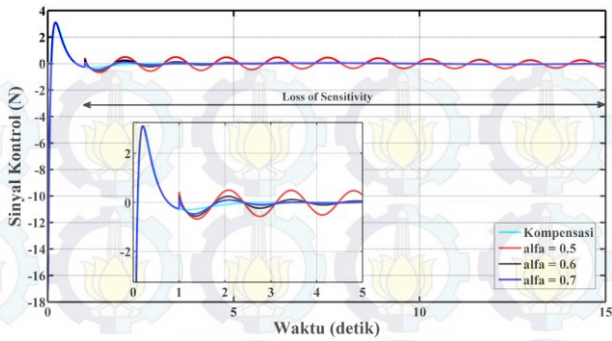
Gambar 4.18 Respon Posisi Kereta *Faulty* dan Kompensasi



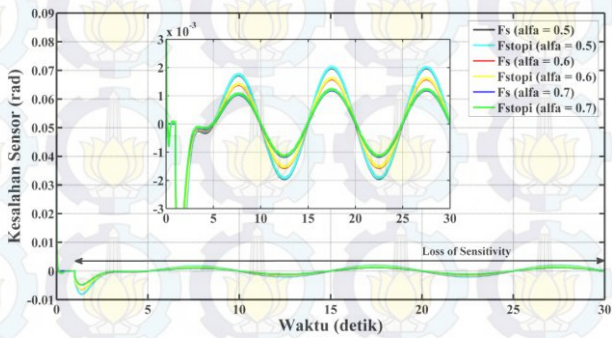
Gambar 4.19 Respon Posisi Pendulum *Faulty* dan Kompensasi

Tabel 4.5 Perbandingan Respon Posisi Kereta *Faulty* dan Kompensasi

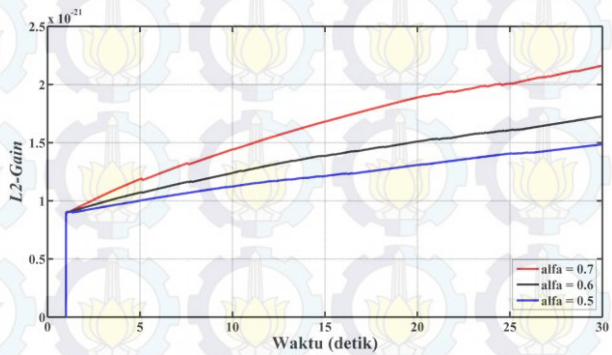
α_2	Tanpa Kompensasi			Dengan Kompensasi		
	Maks. <i>Ripple</i> (m)	Waktu untuk Kembali ke Nominal (detik)	IAE (m·detik)	<i>Ripple</i> Maks. (m)	Waktu untuk Kembali ke Nominal (detik)	IAE (m·detik)
0,5	0,0207	≥ 30	0,5935	≈ 0	≈ 0	0,4368
0,6	0,0062	8,4	0,4663	≈ 0	≈ 0	0,4368
0,7	0,0001	3,5	0,4583	≈ 0	≈ 0	0,4368



Gambar 4.20 Sinyal Kontrol *Faulty* dan Kompensasi



Gambar 4.21 Estimasi Kesalahan Sensor



Gambar 4.22 L_2 -Gain Saat Terjadi *Loss of Sensitivity*

Dari nilai IAE hasil kompensasi yang dibandingkan dengan IAE keadaan nominal, diperoleh selisih yang sangat kecil yakni sebesar 0.0028 m·detik. Oleh karena itu skenario FTC mampu menanggulangi pengaruh *loss of sensitivity* pada sensor posisi pendulum dan mampu mengembalikan performa sistem ke keadaan nominalnya.

4.1.4 Pengujian *Loss of Measurement* ($\alpha_i = 0$ dan $\beta_i = 0$)

Skenario pengujian *loss of measurement* dilakukan pada $5 \leq t \leq 7,5$ detik dan pada $15 \leq t \leq 17,5$ detik dengan kondisi awal posisi pendulum sebesar 0,1 rad. Secara matematis *loss of measurement* dapat dituliskan dengan:

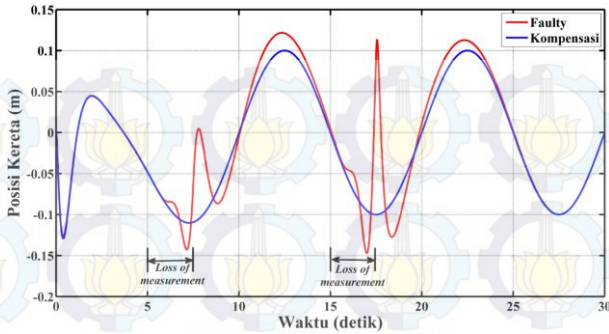
$$x_{2f} = 0 \text{ rad}$$

$$\alpha_2 = \begin{cases} 0 & ; \quad 5 \leq t \leq 7,5 \text{ detik dan } 15 \leq t \leq 17,5 \text{ detik} \\ 1 & ; \quad t \text{ lainnya} \end{cases}$$

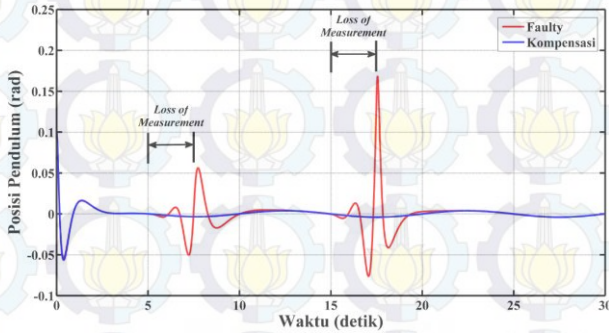
Pemodelan *loss of measurement* ke dalam *additive fault* adalah sebagai berikut:

$$f_{s2} = -x_2$$

Pada Gambar 4.23 terlihat bahwa akibat yang ditimbulkan *loss of measurement* selama 2,5 detik yakni pada detik $t = 5$ detik dan $t = 15$ detik mengakibatkan posisi kereta mengalami *undershoot* dan *overshoot*. Besarnya *undershoot* dan *overshoot* pada $t = 5$ detik adalah 0,046 m dan 0,104 m. Sedangkan besarnya *undershoot* dan *overshoot* pada $t = 15$ detik adalah 0,052 m dan 0,212 m. Respon posisi kereta dapat kembali ke performa nominal setelah 7,5 detik. Respon posisi pendulum akibat *loss of measurement* dapat dilihat pada Gambar 4.24. Dari gambar tersebut dapat dilihat bahwa respon posisi pendulum juga mengalami *undershoot* dan *overshoot*. Hal tersebut terjadi karena selama selang waktu 2,5 detik terjadi pengukuran sudut yang salah, sehingga mengakibatkan kontroler mengeluarkan sinyal kontrol yang salah juga. Pada Gambar 4.25 menunjukkan estimasi kesalahan sensor saat *loss of measurement*. Terlihat bahwa estimasi kesalahan memiliki nilai yang berkebalikan dengan nilai posisi pendulum.

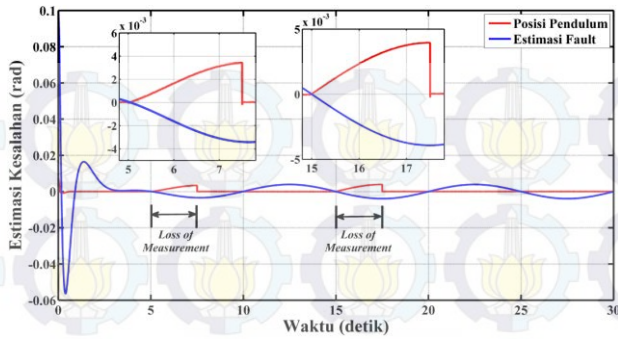


Gambar 4.23 Perbandingan Respon Posisi Kereta *Faulty* dengan Respon Posisi Kereta Kompensasi

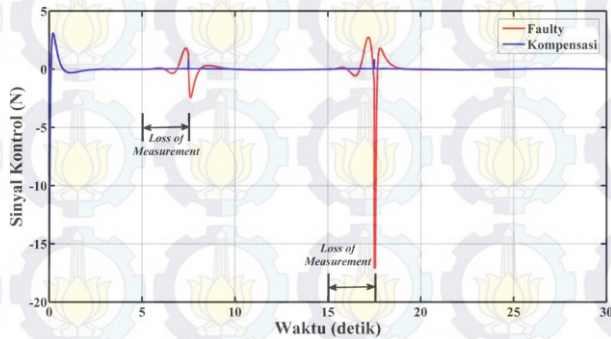


Gambar 4.24 Respon Posisi Pendulum Saat *Faulty* dan Kompensasi

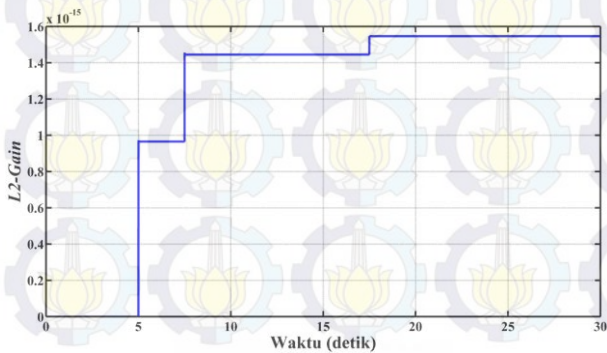
Gambar 4.26 menunjukkan sinyal kontrol *faulty* dan sinyal kontrol hasil kompensasi FTC. Sinyal kontrol hasil kompensasi memiliki respon yang hampir sama dengan sinyal kontrol nominal. Perbedaan yang cukup tampak hanya terjadi sedikit *overshoot* pada waktu $t = 5$ detik dan $t = 15$ detik. Besar nilai *overshoot* yakni 0,709 N pada $t = 5$ detik dan 0,036 N pada $t = 15$. Hal ini terjadi sebagai akibat *error* estimasi kesalahan selama pada selang waktu yang singkat, sehingga berpengaruh pada nilai sinyal kontrol yang dihasilkan oleh kontroler. Nilai L_2 -Gain pada Gambar 4.27 menunjukkan pelemahan turunan kedua sinyal terhadap *error* estimasi masih di bawah level pelemahan γ_{pmi_1} dan γ_{pmi_1} .



Gambar 4.25 Estimasi Kesalahan *Loss of Measurement*



Gambar 4.26 Perbandingan Sinyal Kontrol *Faulty* dan Sinyal Kontrol Kompensasi



Gambar 4.27 L_2 -Gain Saat Terjadi *Loss of Measurement*

Karakteristik performa sistem *faulty* dan dengan kompensasi diukur dengan IAE. Performa sistem dengan kompensasi menghasilkan nilai IAE sama dengan 0,437 m·detik. Nilai ini hanya berselisih 0,0025 m·detik dengan IAE saat kondisi nominal, sehingga FTC mampu mengembalikan performa sistem ke keadaan nominal walaupun saat terjadi *loss of measurement* pada sensor posisi pendulum. Karakteristik performa sistem *faulty* dan dengan kompensasi dirangkum ke dalam Tabel 4.6:

Tabel 4.6 Karakteristik Sistem *Faulty* dan Sistem Dengan Kompensasi

Kondisi Sensor	IAE (m·detik)	Sinyal Kontrol (N)		Posisi Kereta (m)		Posisi Pendulum (rad)	
		MO*	MU**	MO*	MU**	MO*	MU**
<i>Faulty</i> 1 ⁺	0,818	1,788	2,455	0,104	0,046	0,059	0,047
<i>Faulty</i> 2 ⁺⁺		2,683	17,158	0,212	0,052	0,072	0,172
Dengan Kompensasi 1 ⁺	0,437	0,709	0	≈ 0	≈ 0	≈ 0	≈ 0
Dengan Kompensasi 2 ⁺⁺		0,036	0	≈ 0	≈ 0	≈ 0	≈ 0

*MO = Maks. *Overshoot*, **MU = Maks. *Undershoot*
+1 = keadaan saat $5 \leq t \leq 7,5$ detik; ++2 = keadaan saat $15 \leq t \leq 17,5$ detik

4.1.5 Pengujian *Stuck Sensor Reading* ($\alpha_i = 0$ dan $\beta_i \neq 0$)

Pengukuran posisi pendulum terkunci pada suatu nilai sebesar 0,05 rad mulai $t \geq 20$ detik. Berdasarkan definisi *stuck sensor reading* pada Subbab 2.1, maka dapat ditulis:

$$x_{2f} = \beta_2$$

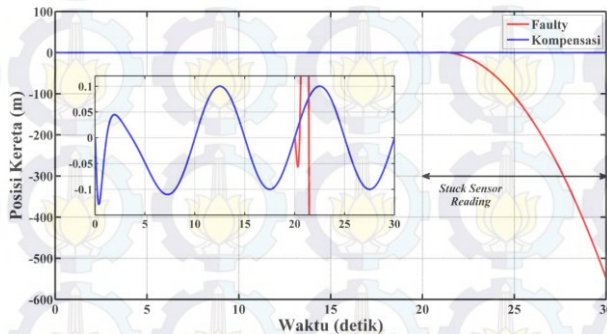
$$\beta_2 = \begin{cases} 0,05 \text{ rad} & ; t \geq 20 \text{ detik} \\ x_2 & ; t \text{ lainnya} \end{cases}$$

Penulisan *stuck sensor reading* dalam *additive fault* dapat ditulis sebagai berikut:

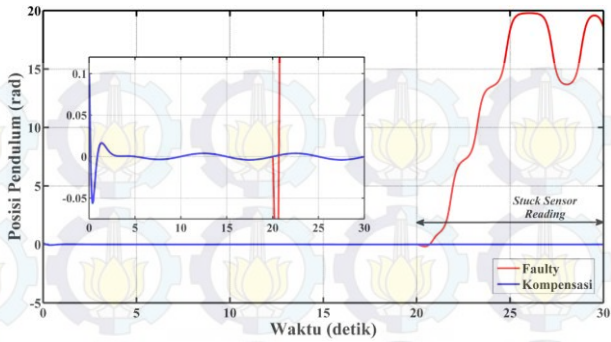
$$f_{s2} = -x_2 + \beta$$

Gambar 4.28-4.30 menunjukkan respon posisi kereta, posisi pendulum, dan sinyal kontrol *faulty*. Respon posisi kereta berubah menjadi tidak stabil sejak terjadinya *stuck sensor reading*. Sementara respon posisi pendulum terus naik dan akhirnya beresilasi pada nilai 16,92 rad. Dengan penambahan kompensasi FTC, respon posisi kereta dan respon posisi pendulum menjadi mirip dengan keadaan nominalnya. Nilai IAE respon posisi kereta hasil kompensasi didapatkan sama dengan 0,4368 m·detik. Nilai tersebut hanya memiliki selisih 0,0023 m·detik dengan IAE kondisi nominal. Hal ini menunjukkan bahwa skenario FTC mampu mengembalikan performa sistem ke keadaan nominalnya dengan waktu yang singkat.

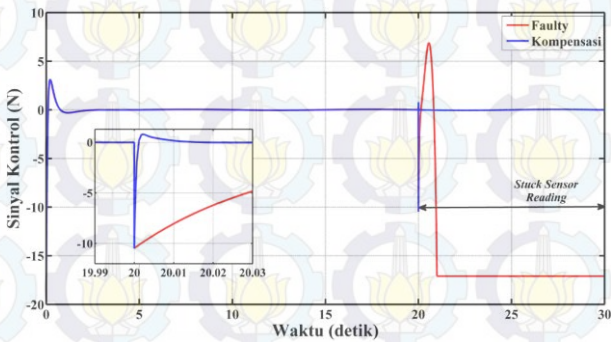
Sinyal kontrol kompensasi mengalami *undershoot* yang besarnya 10,5 N. *Undershoot* tersebut terjadi pada $t = 20$ detik dan dalam waktu yang singkat. Hal tersebut terjadi sebagai efek dari adanya *error* estimasi kesalahan. Hasil estimasi sinyal kesalahan tertera pada Gambar 4.31. Estimasi sinyal kesalahan mengalami *overshoot* dengan nilai 0,0034 rad selama selang waktu 0,02 detik. Secara keseluruhan estimasi sinyal kesalahan dapat dikatakan baik karena memiliki bentuk yang mirip dengan sinyal kesalahan asli dengan rumus $f_{s2} = -x_2 + \beta$. Hal tersebut dibuktikan dengan nilai IAE estimasi kesalahan sebesar 0,001532 rad·detik. Nilai *L2-Gain* pada Gambar 4.32 masih berada di bawah level pelemahan γ_{pmi_1} dan γ_{pmi_1} , sehingga skenario FTC mampu mengatasi kesalahan *stuck sensor reading*.



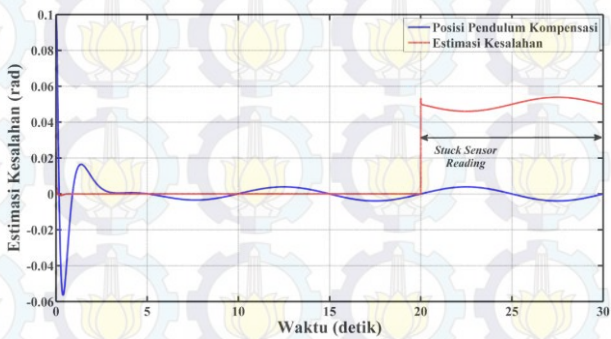
Gambar 4.28 Respon Posisi Kereta *Faulty* dan Kompensasi



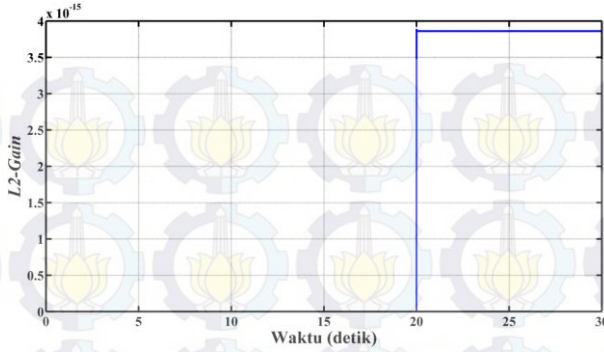
Gambar 4.29 Respon Posisi Pendulum *Faulty* dan Kompensasi



Gambar 4.30 Sinyal Kontrol *Faulty*



Gambar 4.31 Estimasi Kesalahan Sensor Saat *Stuck Sensor Reading*



Gambar 4.32 L_2 -Gain Simulasi Saat *Stuck Sensor Reading*

4.2 Hasil Implementasi

Sistem kontrol yang digunakan pada implementasi tidak persis sama dengan sistem kontrol pada simulasi. Perbedaan terletak pada nilai *gain observer*. Pada simulasi, *gain observer* hasil desain memiliki entri matriks dengan nilai sangat besar dengan orde hingga 10^5 dan beberapa entri lainnya memiliki nilai sangat kecil dengan orde 10^{-16} . Hal tersebut memicu terjadinya NaN (*Not a Number*) pada estimasi kesalahan saat implementasi. Parameter *observer* diubah sedemikian rupa hingga dapat memberikan estimasi kesalahan dengan *error* estimasi terkecil. Parameter *observer* yang diubah diantaranya adalah $\gamma_{obs} = 0,01$, $\theta_{obs} = 5^\circ$, dan ditambahkan satu LMI *region* yang membatasi nilai absolut bagian real dari *pole observer* yakni kurang dari 1. *Initial condition* yang diberikan pada *observer* yakni $\hat{\mathbf{x}}(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$. *Gain* dan *pole observer* untuk implementasi diperoleh sebagai berikut:

$$\bar{\mathbf{L}}_1 = \begin{bmatrix} 0,6619 & -0,0000 & 1,0000 & 0,0000 \\ -0,0000 & -0,0000 & 0,0002 & 1,0122 \\ 0,0000 & -0,0000 & 0,6620 & 0,0079 \\ -0,0000 & -0,0000 & 0,0079 & 1,1309 \\ 0,0000 & 0,6010 & -0,0003 & -0,0177 \\ 0,0000 & 1,5962 & -0,0005 & -0,0315 \end{bmatrix}$$

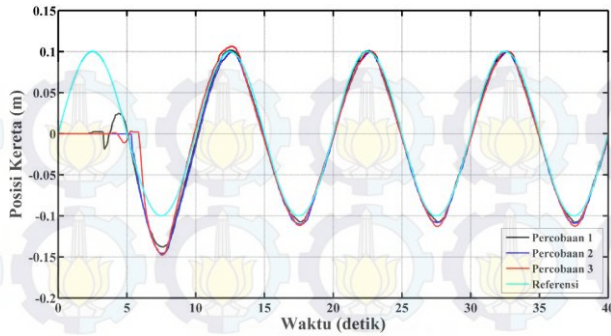
$$\mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} 0,6613 & -0,0000 & 1,0000 & 0,0000 \\ -0,0000 & -0,0000 & 0,0002 & 1,0129 \\ 0,0000 & -0,0000 & 0,6614 & 0,0071 \\ -0,0000 & -0,0002 & 0,0072 & 1,1262 \\ 0,0000 & 0,5960 & -0,0002 & -0,0102 \\ 0,0000 & 1,5903 & -0,0004 & -0,0242 \end{bmatrix}$$

$$pole_1 = \begin{bmatrix} -0,1953 \\ -0,6085 \\ -0,6618 \\ -0,6619 \\ -0,9436 \\ -0,9877 \end{bmatrix}; \quad pole_2 = \begin{bmatrix} -0,2000 \\ -0,6048 \\ -0,6613 \\ -0,6613 \\ -0,9342 \\ -0,9856 \end{bmatrix}$$

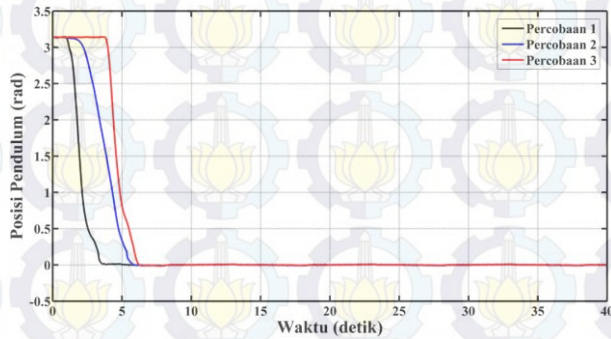
4.2.1 Keadaan Nominal

Implementasi dilakukan dengan mengayunkan batang pendulum hingga memasuki zona stabilisasinya. Respon posisi kereta saat tidak terjadi kesalahan sensor, ditunjukkan pada Gambar 4.33. Dari Gambar 4.33 dapat dilihat bahwa respon posisi kereta mampu mengikuti sinyal referensi lebih cepat daripada respon saat simulasi. Hal ini terjadi dikarenakan terdapat *initial condition* pada kecepatan pendulum yang arahnya berlawanan dengan arah jatuh pendulum sehingga posisi pendulum segera menuju posisi terbaliknya. Namun, respon posisi kereta masih mengalami *error tracking* pada saat mencapai puncak negatif dari kurva sinusoidal. Nilai IAE *tracking* respon posisi kereta pada percobaan 1, 2, dan 3 secara berturut-turut adalah 0,2788 m·detik; 0,3047 m·detik; dan 0,26380 m·detik. Nilai ini lebih kecil daripada nilai IAE saat simulasi, sehingga performa *tracking* posisi kereta masih dapat dikatakan baik.

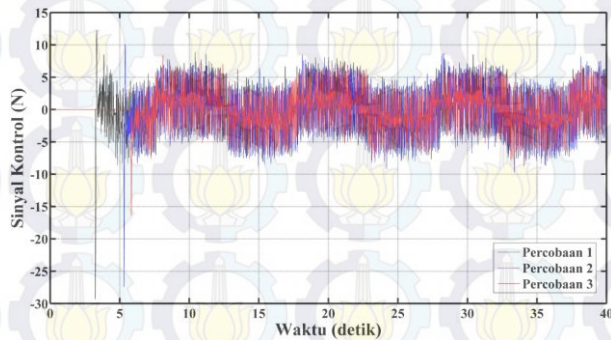
Respon posisi pendulum dan sinyal kontrol ditunjukkan pada Gambar 4.34-4.35. Dapat dilihat pada Gambar 4.34, respon posisi pendulum pada percobaan 1, 2, dan 3 secara berturut-turut mampu berada di sekitar 0 rad dalam waktu 0,512 detik; 0,488 detik; dan 0,371 detik sejak sinyal kontrol aktif, sehingga respon posisi pendulum dapat dikatakan baik. Sinyal kontrol saat awal memiliki nilai -29,3106 N; -27,4287 N; dan -16,3831 N pada percobaan 1, 2, dan 3, kemudian berosilasi di 0 N dengan amplitudo 5 N. Nilai sinyal kontrol ini tergolong kecil, sehingga batasan *gain* kontroler mampu mengurangi sinyal kontrol yang dihasilkan oleh kontroler. Keseluruhan karakteristik respon saat keadaan nominal dapat dirangkum ke dalam Tabel 4.7.



Gambar 4.33 Respon Posisi Kereta Saat Keadaan Nominal



Gambar 4.34 Respon Posisi Pendulum Saat Nominal

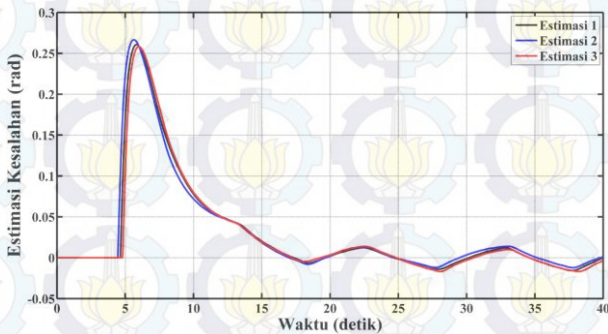


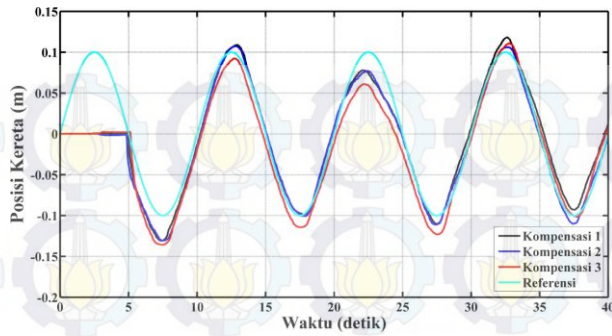
Gambar 4.35 Sinyal Kontrol Saat Keadaan Nominal

Tabel 4.7 Karakteristik Respon Sistem Saat Keadaan Nominal

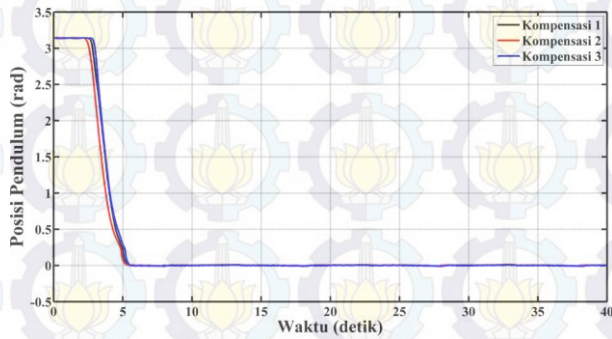
Percobaan ke- n	IAE <i>Tracking</i> (m·detik)	Waktu yang Dibutuhkan x_2 untuk Stabil (detik)	Sinyal Kontrol Maksimum (N)
Percobaan 1	0,2788	0,512	29,3106
Percobaan 2	0,3047	0,488	27,4287
Percobaan 3	0,2638	0,371	16,3831

Estimasi kesalahan saat keadaan nominal ditunjukkan pada Gambar 4.36. Dapat dilihat pada Gambar 4.36 bahwa estimasi kesalahan masih memiliki *error* estimasi baik saat awal implementasi (*transient*) maupun saat sudah *steady state* ($t \geq 20$ detik) dengan nilai IAE estimasi kesalahannya adalah 1,336 rad·detik; 1,340 rad·detik; dan 1,333 rad·detik pada percobaan 1, 2, dan 3. Hal ini terjadi dikarenakan *pole observer* hasil desain memiliki nilai absolut yang relatif kecil. Oleh karena itu, untuk menghindari performa respon sistem hasil kompensasi turun, maka kompensasi kesalahan dilakukan saat $t \geq 20$ detik. Respon posisi kereta, posisi pendulum dan sinyal kontrol secara berturut-turut ditunjukkan pada Gambar 4.37-4.39. Performa *tracking* posisi kereta terhadap sinyal referensi sedikit menurun dengan nilai IAE *tracking* pada percobaan 1, 2, dan 3 secara berturut-turut adalah 0,4291 m·detik; 0,3691 m·detik; dan 0,5718 m·detik. Namun, respon posisi pendulum dan sinyal kontrol masih memiliki karakteristik hampir sama dengan keadaan nominal. Karakteristik respon sistem dengan kompensasi dirangkum ke dalam Tabel 4.8.

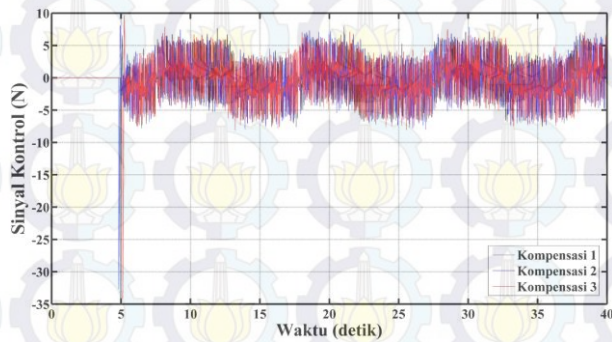
**Gambar 4.36** Estimasi Kesalahan Saat *Fault Free Case*



Gambar 4.37 Respon Posisi Kereta dengan Kompensasi



Gambar 4.38 Respon Posisi Pendulum dengan Kompensasi



Gambar 4.39 Sinyal Kontrol dengan Kompensasi

Tabel 4.8 Spesifikasi Respon Sistem Saat *Fault Free Case* dengan Kompensasi

Percobaan ke- <i>n</i>	IAE <i>Tracking</i> (m·detik)	IAE Estimasi Kesalahan Sensor (rad·detik)
Percobaan 1	0,4291	1,336
Percobaan 2	0,3691	1,340
Percobaan 3	0,5718	1,333

4.2.2 Pengujian *Bias Sensor Faults* ($\alpha_i = 1$ dan $\beta_i \neq 0$)

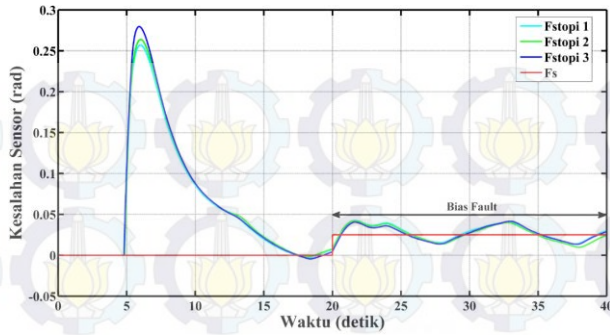
Skenario pengujian *bias sensor faults* pada implementasi terjadi pada waktu $t \geq 20$ detik dengan nilai 0,025 rad. Secara matematis, skenario tersebut dapat dituliskan dengan:

$$x_{2f} = x_2 + \beta_2$$

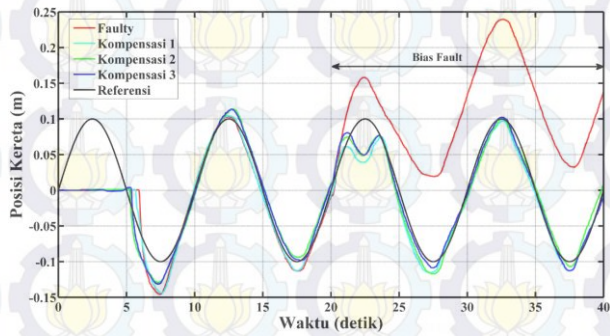
$$f_{s2} = \beta_2$$

$$\beta_2 = \begin{cases} 0 \text{ rad} & ; \quad t \text{ lainnya} \\ 0,025 \text{ rad} & ; \quad t \geq 20 \text{ detik} \end{cases}$$

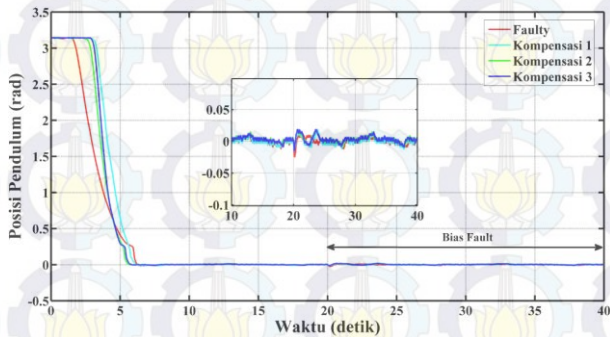
Estimasi kesalahan sensor ditunjukkan pada Gambar 4.40. Estimasi *bias fault* saat awal memiliki nilai *error* estimasi yang cukup besar yakni 0,252 rad. Kemudian, estimasi kesalahan berosilasi pada nilai 0,0275 rad dengan amplitudo 0,0136 rad. Hal ini terjadi karena *pole observer* saat implementasi memiliki nilai absolut *pole* yang kecil. Respon posisi kereta dan posisi pendulum secara berturut-turut ditunjukkan pada Gambar 4.41 dan Gambar 4.42. Respon posisi kereta *faulty* mengalami pergeseran *range* kerja, yakni berosilasi pada nilai 0,15 m dengan amplitudo 0,1 m. Nilai IAE *tracking* respon posisi kereta *faulty* adalah 1,28 m·detik sedangkan nilai IAE *tracking* dengan kompensasi pada percobaan 1, 2, dan 3 secara berturut-turut adalah 0,4074 m·detik; 0,4245 m·detik; dan 0,3339 m·detik. Hal ini menunjukkan bahwa respon posisi kereta mampu dikembalikan pada performa nominalnya, walaupun sedikit mengalami lonjakan pada lima detik pertama kompensasi. Respon posisi pendulum seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.42 juga mampu dikompensasi sehingga tetap berada pada sekitar 0 rad.



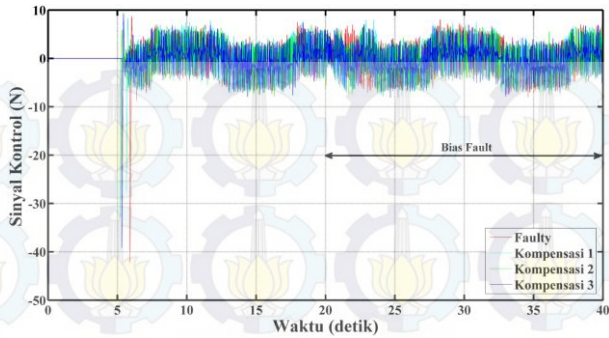
Gambar 4.40 Estimasi *Bias fault*



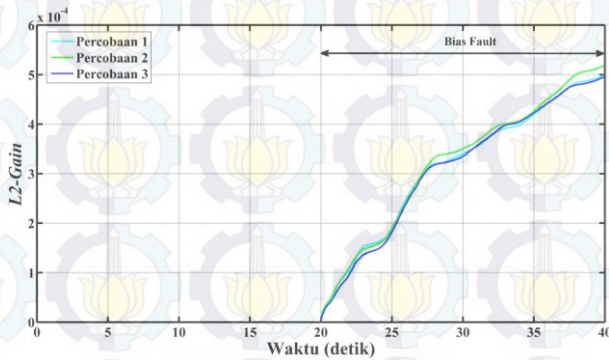
Gambar 4.41 Respon Posisi Kereta *Faulty* dan Kompensasi



Gambar 4.42 Respon Posisi Pendulum Saat *Faulty* dan Kompensasi



Gambar 4.43 Sinyal Kontrol *Faulty* dan Kompensasi



Gambar 4.44 L_2 -Gain Saat Terjadi *Bias Fault*

Sinyal kontrol dan L_2 -Gain ditunjukkan pada Gambar 4.43-4.44. Dari Gambar 4.43 dapat dilihat bahwa sinyal kontrol kompensasi sedikit mengalami lonjakan pada awal terjadi kesalahan, namun nilainya tidak begitu terlihat dikarenakan osilasi yang terjadi pada sinyal kontrol. Grafik L_2 -Gain pada Gambar 4.44 juga masih di bawah level pelemahan γ_{pm1} dan γ_{pm2} hasil desain dengan nilai maksimal adalah 0,0004991; 0,0005184; dan 0,0004963 pada percobaan 1, 2, dan 3, sehingga dapat disimpulkan skenario FTC mampu mengembalikan performa Sistem Pendulum Kereta kembali pada performa nominalnya walaupun terjadi *bias fault*. Keseluruhan spesifikasi respon sistem saat *bias fault* dirangkum pada Tabel 4.9:

Tabel 4.9 Spesifikasi Respon Sistem Saat Terjadi *Bias Fault*

Percobaan	IAE <i>Tracking</i> (m·detik)	Nilai Maksimum L_2 - <i>Gain</i>
<i>Faulty</i>	1,2800	-
Kompensasi 1	0,4074	0,0004991
Kompensasi 2	0,4245	0,0005184
Kompensasi 3	0,3339	0,0004963

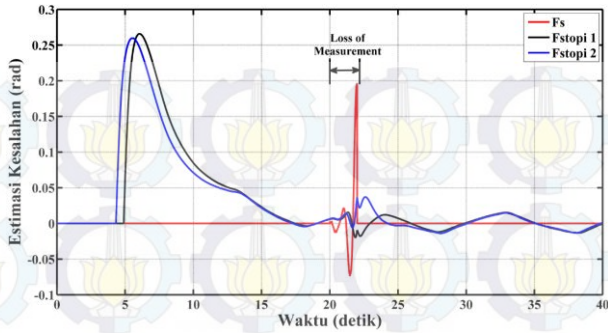
4.2.3 Pengujian *Loss of Measurement* ($\alpha_i = 0$ dan $\beta_i = 0$)

Skenario pengujian yang kedua adalah *loss of measurement*, diberikan selama 2 detik dan dimulai pada $t = 20$ detik. Secara matematis skenario *loss of measurement* dapat dituliskan dengan:

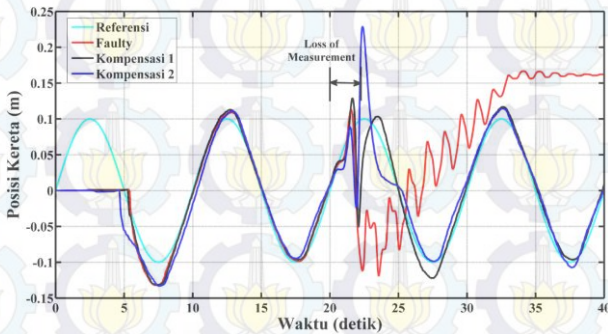
$$x_{2f} = \begin{cases} 0 \text{ rad} ; & 20 \leq t \leq 22 \text{ detik} \\ x_2 ; & t \text{ lainnya} \end{cases}$$

$$f_{s2} = \begin{cases} -x_2 ; & 20 \leq t \leq 22 \text{ detik} \\ 0 \text{ rad} ; & t \text{ lainnya} \end{cases}$$

Sama seperti estimasi *bias fault*, estimasi kesalahan *loss of measurement* yang ditunjukkan pada Gambar 4.45 memiliki nilai *error* estimasi yang besar pada awal implementasi dikarenakan perbedaan *initial condition* yang besar. *Observer* juga tidak dapat mengestimasi kesalahan yang berubah terlalu mendadak. Respon posisi kereta *faulty* menjadi tidak stabil karena batang pendulum tidak dapat bertahan di sekitar 0 rad dan kemudian jatuh. Hal ini sebagai akibat kesalahan yang muncul melebihi batas zona stabilisasi yang ditetapkan pada implementasi, yakni sebesar 0,25 rad. Respon posisi kereta pada Gambar 4.46 dengan kompensasi FTC mampu mengembalikan posisi kereta untuk mengikuti sinyal referensi dengan nilai IAE *tracking* adalah sebesar 0,4097 m·detik pada percobaan 1 dan 0,5886 m·detik pada percobaan 2, namun mengalami sedikit *overshoot* pada saat $t = 22,38$ detik. Hal ini terjadi akibat estimasi kesalahan sensor pada $20 \leq t \leq 25$ detik memiliki nilai *error* estimasi yang cukup besar.

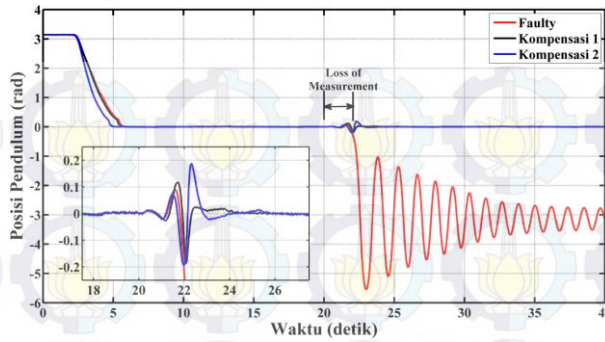


Gambar 4.45 Estimasi Kesalahan *Loss of Measurement*

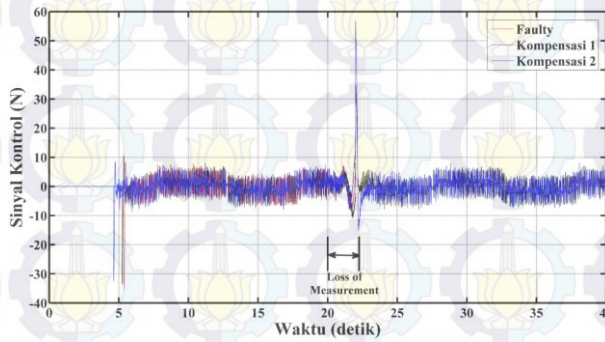


Gambar 4.46 Respon Posisi Kereta *Faulty* dan Kompensasi

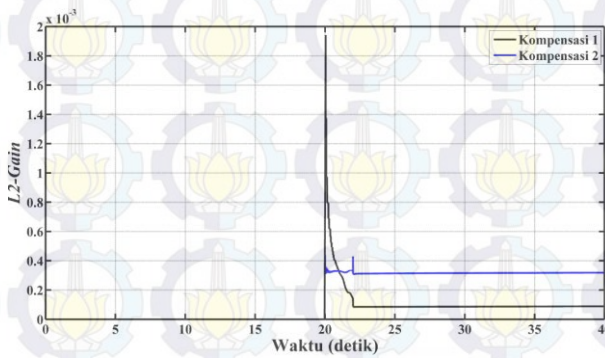
Sinyal kontrol *faulty* dan kompensasi ditunjukkan pada Gambar 4.48. Sinyal kontrol *faulty* bernilai 0 N saat batang pendulum keluar dari zona stabilnya yakni 0,25 rad. Sedangkan sinyal kontrol kompensasi mengalami lonjakan yang sangat besar dengan nilai 34,72 N dan 56,96 N pada percobaan 1 dan 2. Hal ini juga dikarenakan sempat terjadi *error* estimasi kesalahan yang sangat besar pada awal terjadinya kesalahan. Nilai L_2 -Gain saat terjadi *loss of measurement* ditunjukkan pada Gambar 4.49. Nilai tersebut juga masih berada di bawah level pelemahan γ_{pmi1} dan γ_{pmi2} dengan nilai maksimal adalah 0,0019410 pada percobaan 1 dan 0,0004368 pada percobaan 2. Secara keseluruhan skenario FTC yang diterapkan mampu mengembalikan performa *tracking* posisi kereta dari Sistem Pendulum Kereta walaupun terjadi kesalahan berupa *loss of measurement*. Keseluruhan spesifikasi respon dapat dilihat pada Tabel 4.10.



Gambar 4.47 Respon Posisi Pendulum *Faulty* dan Kompensasi



Gambar 4.48 Sinyal Kontrol *Faulty* dan Kompensasi



Gambar 4.49 L_2 -Gain Saat Terjadi *Loss of Measurement*

Tabel 4.10 Spesifikasi Respon Sistem Saat Terjadi *Loss of Measurement*

Percobaan	IAE <i>Tracking</i> (m·detik)	Lonjakan Sinyal Kontrol (N)	Nilai Maksimum L_2 -Gain
<i>Faulty</i>	-	-	-
Kompensasi 1	0,4097	34,72	0,0019410
Kompensasi 2	0,5886	56,96	0,0004368

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Kanev, S., "*Robust Fault-Tolerant Control*", FEBO-DRUK, Enschede, 2004.
- [2] Bouattour, M., Chadli, M., Hajjaji, A. A. dan Chaabane, M., " H_{∞} Sensor Faults Estimation for T-S Models using Descriptor Techniques: Application to Fault Diagnosis", *IEEE Fuzzy Systems*, pp. 251-255, 2009.
- [3] Gao, Z. dan Ding, S. X., "Sensor Fault Reconstruction and Sensor Compensation for a Class of Nonlinear State-space Systems via a Descriptor System Approach", *IET Control Theory Appl.*, vol. 3, pp. 578-585, 2007.
- [4] Shaker, M. S., "*Active Fault-Tolerant Control of Nonlinear Systems with Wind Turbine Application*", The University of Hull Press., Hull, 2012.
- [5] Ashfahani, A. dan Agustinah, T., "Desain Fuzzy Tracking Controller pada Pendulum Terbalik dengan Memperhitungkan Model Friksi", in *SITIA*, Surabaya, 2012.
- [6] _____, "*Control in a Matlab Environment (Matlab 6.5 Version)*", Feedback Instrument Ltd., England, 2004.
- [7] Ogata, K., "*Modern Control Engineering 3rd edition*", Prentice-Hall, New Jersey, 1997.
- [8] Passino, K. M. dan Yurkovich, S., "*Fuzzy Control*", Addison Wesley Longman, Inc., California, 1998.
- [9] Boyd, S. dan Ghaoui, L. E., "*Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*", SIAM, Philadelphia, 1994.
- [10] Zhou, K. dan Doyle, J. C., "*Essentials of Robust Control*", Prentice-Hall, Chinese, 1999.
- [11] Mahato, U., "*Low Gain Controller Design with Regional Pole Placement Constraints*", National Institute of Technology Rourkela Press., Odisha, 2013.



BAB 5

PENUTUP

Pada bab ini diuraikan mengenai kesimpulan berdasarkan penelitian yang telah dikerjakan dan saran mengenai hal-hal yang masih dapat dikembangkan lebih lanjut atau yang belum sempat dikerjakan.

5.1 Kesimpulan

Dari hasil pengujian simulasi dan implementasi pada Sistem Pendulum Kereta, dapat diambil beberapa kesimpulan sebagai berikut:

- Kontrol *tracking state feedback* dengan kompensator hasil perancangan mampu memaksa posisi kereta untuk mengikuti sinyal referensi dengan IAE sebesar 0,3047 m·detik.
- Kompensasi kesalahan sensor menggunakan *Proportional Multiple Integral Observer* (PMIO) mampu memperbaiki performa *tracking* posisi kereta saat terjadi *bias fault*. Hal tersebut dibuktikan dengan nilai IAE *tracking* tanpa kompensasi dan dengan kompensasi masing-masing sebesar 1,28 m·detik dan 0,3339 m·detik.
- Kompensasi kesalahan sensor menggunakan *Proportional Multiple Integral Observer* (PMIO) mampu memperbaiki performa *tracking* posisi kereta saat terjadi *loss of measurement*. Walaupun sistem tidak stabil saat tidak dikompensasi, namun hasil kompensasi mampu menjaga sistem tetap stabil dengan nilai IAE *tracking* sebesar 0,4097 m·detik.

5.2 Saran

Dalam Tugas Akhir ini, kesalahan sensor yang terletak pada sensor posisi kereta (*position encoder*) tidak dapat ditanggulangi pengaruhnya. Masalah ini disebabkan kesalahan sensor yang terjadi pada sensor posisi kereta tidak dapat memenuhi syarat *observable* dari *Proportional Multiple Integral Observer*. Oleh karena itu, untuk pengembangan penelitian selanjutnya, penulis menyarankan penggunaan skenario FTC yang mampu untuk mengestimasi kesalahan sensor posisi kereta sekaligus sensor posisi pendulum pada Sistem Pendulum Kereta.



LAMPIRAN A

A.1 Penurunan Model Matematika Sistem Pendulum Kereta

Model matematika Sistem Pendulum Kereta dapat diperoleh dengan analisis hukum Newton. Analisis dilakukan terhadap gerak translasi kereta dan gerak rotasi batang pendulum. Gaya-gaya yang bekerja saat gerak translasi pada sumbu x diantaranya adalah sinyal kontrol u dan gaya gesek T_c , sedangkan keseluruhan massa adalah penjumlahan antara massa kereta m_c dan massa pendulum m_p . Persamaan gerak translasi pada sumbu x dituliskan dengan:

$$\sum F_x = ma_x \quad (A.1)$$

$$a_x = (x_1 - l \sin x_2) \quad (A.2)$$

$$\begin{aligned} u - T_c &= (m_c + m_p)(x_1 - l \sin x_2)'' \\ u - T_c &= (m_c + m_p)(x_1' - x_2' l \cos x_2)' \\ u - T_c &= (m_c + m_p)(x_1'' - x_2'' l \cos x_2 + (x_2')^2 l \sin x_2) \end{aligned} \quad (A.3)$$

Pada sumbu y , gaya-gaya yang bekerja diantaranya adalah gaya normal sistem terhadap sumbu horizontal V dan gaya gravitasi, sehingga persamaan gerak translasi pada sumbu y dapat dituliskan dengan:

$$\sum F_y = ma_y \quad (A.4)$$

$$a_y = (l \cos x_2)'' \quad (A.5)$$

$$\begin{aligned} V - (m_c + m_p)g &= (m_c + m_p)(l \cos x_2)'' \\ V &= (m_c + m_p)g + (m_c + m_p)(-lx_2' \sin x_2)' \\ V &= (m_c + m_p)g + (m_c + m_p)(-lx_2'' \sin x_2 - l(x_2')^2 \cos x_2) \\ V &= (m_c + m_p)(g - lx_2'' \sin x_2 - l(x_2')^2 \cos x_2) \end{aligned} \quad (A.6)$$

Selanjutnya, persamaan gerak rotasi batang pendulum diperoleh dengan menganalisa torsi-torsi yang bekerja saat batang pendulum berotasi. Torsi-torsi yang bekerja diantaranya adalah torsi akibat u dan T_c serta

momen gesek akibat rotasi batang pendulum. Keseluruhan gerak rotasi dituliskan pada (A.7)

$$\sum \tau = J\alpha \quad (\text{A.7})$$

$$(u - T_c)l \cos x_2 + Vl \sin x_2 - D_p = Jx_2''$$

$$(u - T_c)l \cos x_2 + Vl \sin x_2 - f_p x_4 = Jx_2'' \quad (\text{A.8})$$

dengan melakukan substitusi (A.6) ke dalam (A.8) didapatkan (A.9) dan (A.10)

$$Jx_2'' = (u - T_c)l \cos x_2 - f_p x_4$$

$$+ (m_c + m_p)(g - lx_2'' \sin x_2 - l(x_2')^2 \cos x_2)l \sin x_2 \quad (\text{A.9})$$

$$Jx_4' = (u - T_c)l \cos x_2 - f_p x_4 + (m_c + m_p)l$$

$$(g \sin x_2 - lx_4' \sin^2 x_2 - l(x_4')^2 \cos x_2 \sin x_2)$$

$$Jx_4' = (u - T_c - \mu x_4'^2 \sin x_2)l \cos x_2 + \mu g \sin x_2$$

$$- \mu lx_4' \sin^2 x_2 - f_p x_4$$

$$x_4'(J + \mu l \sin^2 x_2) = (u - T_c - \mu x_4'^2 \sin x_2)l \cos x_2$$

$$+ \mu g \sin x_2 - f_p x_4$$

$$x_4' = \frac{(u - T_c - \mu x_4'^2 \sin x_2)l \cos x_2 + \mu g \sin x_2 - f_p x_4}{J + \mu l \sin^2 x_2} \quad (\text{A.10})$$

dengan $\mu = (m_c + m_p)l$

Substitusi (A.10) ke dalam (A.3)

$$u - T_c = (m_c + m_p)(x_3' - x_4' l \cos x_2 + x_4'^2 l \sin x_2)$$

$$(m_c + m_p)x_3' = u - T_c + \mu x_4' \cos x_2 - \mu x_4'^2 \sin x_2$$

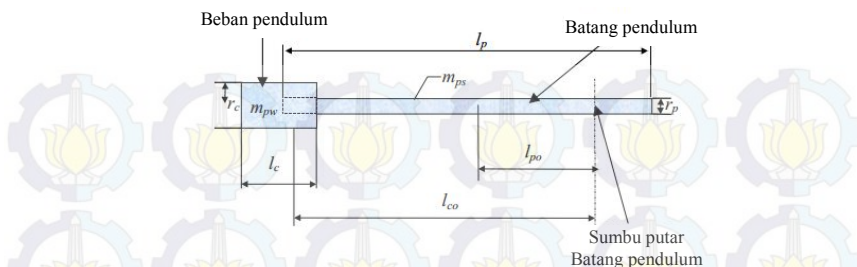
$$(m_c + m_p)x_3' = u - T_c - \mu x_4'^2 \sin x_2$$

$$+ \frac{\mu l \cos^2 x_2 (u - T_c - \mu x_4'^2 \sin x_2)}{J + \mu l \sin^2 x_2} + \frac{\mu \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{J + \mu l \sin^2 x_2}$$

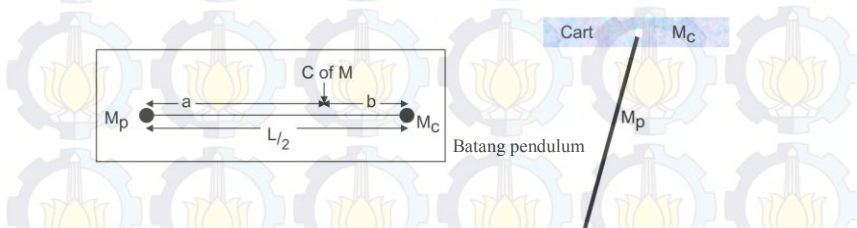
$$\begin{aligned}
(m_c + m_p)x_3' &= \frac{(J + \mu l \sin^2 x_2)(u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2)}{J + \mu l \sin^2 x_2} \\
&+ \frac{\mu l \cos^2 x_2 (u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2)}{J + \mu l \sin^2 x_2} + \frac{\mu \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{J + \mu l \sin^2 x_2} \\
(m_c + m_p)x_3' &= \frac{(J + \mu l)(u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2)}{J + \mu l \sin^2 x_2} \\
&+ \frac{\mu \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{J + \mu l \sin^2 x_2} \\
x_3' &= \frac{(J + \mu l)l}{(m_c + m_p)l} \frac{(u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2)}{J + \mu l \sin^2 x_2} \\
&+ \frac{\mu l \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{(m_c + m_p)l(J + \mu l \sin^2 x_2)} \\
x_3' &= \left(l^2 + \frac{J}{(m_c + m_p)} \right) \frac{(u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2)}{J + \mu l \sin^2 x_2} \\
&+ \frac{l \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{(J + \mu l \sin^2 x_2)} \\
x_3' &= \frac{a(u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2) + l \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{J + \mu l \sin^2 x_2} \quad (A.11)
\end{aligned}$$

dengan $a = l^2 + \frac{J}{(m_c + m_p)}$

Momen inersia dari Sistem Pendulum Kereta diperoleh dengan menganalisis pusat massa yang ada pada pendulum seperti yang diilustrasikan pada Gambar A.1 dengan m_{pw} adalah massa beban pendulum (kg), m_{ps} adalah massa batang pendulum (kg), l_p adalah panjang batang pendulum (m), l_{p0} adalah jarak antara titik pusat massa beban pendulum dengan sumbu putar batang pendulum (m), r_p adalah jari-jari batang pendulum (m), dan r_c adalah jari-jari batang pendulum (m). Momen inersia pendulum terhadap sumbu rotasi ditunjukkan pada Gambar A.1.



Gambar A.1 Ilustrasi Pendulum [6]



Gambar A.2 Ilustrasi Momen Inersia Sistem Pendulum Kereta [6]

Momen inersia pendulum yang berhubungan dengan sumbu putar pendulum adalah

$$J_p = m_{pw} \left(\frac{1}{12} l_c^2 + \frac{1}{4} r_c^2 + l_{co}^2 \right) + m_{ps} \left(\frac{1}{12} l_p^2 + \frac{1}{4} r_p^2 + l_{po}^2 \right) \quad (\text{A.12})$$

Untuk memudahkan perhitungan, batang pendulum diasumsikan sebagai silinder dengan ketebalan seragam dengan panjang L serta massa m_p . Sumbu putar berada pada pusat massa kereta dan pada salah satu ujung dari pendulum sehingga kereta dapat dipandang sebagai titik massa M_c dan pendulum sebagai titik massa M_p . Pusat massa Sistem Pendulum Kereta berada di sekitar titik massa M_c , seperti yang digambarkan pada Gambar A.2. Apabila momen inersia pada pusat massa Sistem Pendulum Kereta adalah J , maka untuk menghitung momen inersia J_p yang berada di titik yang berjarak d dari pusat massa sistem dapat digunakan rumus berikut

$$J_p = J + Md^2 \quad (\text{A.13})$$

Titik pusat massa sistem dapat dirumuskan sebagai berikut

$$M_p a = M_c b \quad (\text{A.14})$$

dengan $a + b = L/2$. Oleh karena itu berdasarkan (A.13) dan (A.14) didapatkan momen inersia terhadap pusat massa Sistem Pendulum Kereta

$$J = M_p a^2 + M_c b^2 + \frac{M_p}{12} L^2 \quad (\text{A.15})$$

dengan nilai a dan b adalah

$$a = \frac{LM_c}{2(M_p + M_c)} \text{ dan } b = \frac{LM_p}{2(M_p + M_c)} \quad (\text{A.16})$$

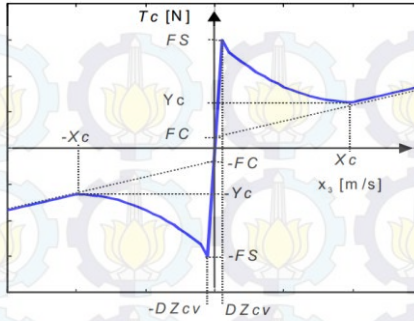
Dengan memasukkan (A.16) ke dalam (A.15) didapatkan persamaan momen inersia sistem secara lengkap

$$J = \frac{L^2 m_p (4m_c + m_p)}{12(m_c + m_p)} \quad (\text{A.17})$$

sedangkan jarak pusat massa Sistem Pendulum Kereta terhadap sumbu putar adalah

$$l = \frac{m_p L}{2(m_c + m_p)} \quad (\text{A.18})$$

Saat kereta mulai akan bergerak, gaya gesek yang mempengaruhi adalah gaya gesek statis (*static friction*), sedangkan kereta yang sudah bergerak dipengaruhi oleh gaya gesek dinamis (*dynamic friction*). Oleh karena itu, gaya gesek yang bekerja pada Sistem Pendulum Kereta dipengaruhi oleh kecepatan kereta x_3 dan bersifat nonlinear. Gaya gesek tersebut diilustrasikan pada Gambar A.3.



Gambar A.3 Gaya Gesek T_c Terhadap Kecepatan Kereta x_3 [6]

Dari Gambar A.3, F_s adalah gaya gesek statis (*static friction*), F_c adalah gaya gesek dinamis (*coulomb friction*), x_c adalah kecepatan kereta saat gaya gesek memasuki daerah linear, Y_c adalah gaya gesek pada titik x_c , dan DZ_{cv} adalah *dead-zone* untuk kecepatan kereta. Berdasarkan Gambar A.3, gaya gesek dibagi menjadi lima daerah yaitu daerah 1 untuk $x_3 < -x_c$, daerah 2 untuk $-x_c \leq x_3 < -DZ_{cv}$, daerah 3 untuk $-DZ_{cv} \leq x_3 \leq DZ_{cv}$, daerah 4 gaya gesek untuk $DZ_{cv} < x_3 \leq x_c$, dan daerah 5 untuk $x_c < x_3$. Persamaan gaya gesek tersebut dapat dituliskan sebagai berikut:

$$T_c(x_3) = \begin{cases} \frac{(Y_c - F_c)x_3}{x_c} - F_c, & x_3 < -x_c \\ \frac{(Y_c - F_s)x_3^2}{x_c^2} - 2\frac{(F_s - Y_c)x_3}{x_c} - F_s, & -x_c \leq x_3 < -DZ_{cv} \\ T_c(x_3) = \frac{F_s}{DZ_{cv}} x_3, & -DZ_{cv} \leq x_3 \leq DZ_{cv} \\ \frac{(F_s - Y_c)x_3^2}{x_c^2} - 2\frac{(F_s - Y_c)x_3}{x_c} + F_s, & DZ_{cv} < x_3 \leq x_c \\ \frac{(Y_c - F_c)x_3}{x_c} + F_c, & x_c < x_3 \end{cases} \quad (A.19)$$

Terakhir, keseluruhan parameter pada Sistem Pendulum Kereta dituliskan pada Tabel A.1.

Tabel A.1 Parameter-Parameter Sistem Pendulum Kereta [6]

Parameter	Simbol	Nilai
Massa kereta (kg)	m_c	1,12
Massa beban pendulum (kg)	m_{pw}	0,095
Massa batang pendulum (kg)	m_{ps}	0,025
Panjang rel (m)	R_l	1
Panjang batang pendulum (m)	l_p	0,402
Jarak pusat massa batang ke sumbu putar (m)	l_{p0}	0,146
Panjang beban (m)	l_c	0,041
Jarak pusat massa beban ke sumbu putar (m)	l_{c0}	0,347
Jari-jari beban pendulum (m)	r_c	0,02
Jari-jari batang pendulum (m)	r_p	0,006
Gaya gesek statis (N)	F_s	2,5316
Gaya gesek dinamis (<i>Coulomb</i>) (N)	F_c	2,2813
Gaya kontrol maksimal (N)	u_{max}	17,5
Gaya kontrol minimal (N)	DZ_u	1,3792
Kecepatan minimal kereta (m/s)	DZ_{cv}	0,008
Kecepatan ayun minimal pendulum (rad/s)	DZ_{pv}	0,034
Gaya gesek pendulum (N)	f_p	0,0001
Momen inersia pendulum (kg.m ²)	J_p	0,0139
Momen inersia sistem (kg.m ²)	J	0,0136
Jarak sumbu rotasi ke pusat massa sistem (m)	l	0,0168
Kec. Kereta awal daerah 5 gaya gesek (m/s)	x_c	0,3955
Gaya gesek saat kecepatan kereta	Y_c	2,3815
Tegangan kontrol maksimal (Volt)	V_m	2,5

A.2 Elemen Matriks Linearisasi Model Sistem Pendulum Kereta

Matriks Jacobi dari Sistem Pendulum Kereta dapat dicari dengan memasukkan $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ seperti yang tertera pada (3.1) dan $\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = x_1$ ke dalam (2.19)-(2.22). Matriks Jacobi tersebut dituliskan sebagai berikut:

$$\mathbf{A} = \frac{\partial f(\mathbf{x}, u)}{\partial \mathbf{x}} \bigg|_{\mathbf{x}^*, u^*} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, u)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, u)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, u)}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, u)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, u)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, u)}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_3(\mathbf{x}, u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3(\mathbf{x}, u)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3(\mathbf{x}, u)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3(\mathbf{x}, u)}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_4(\mathbf{x}, u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4(\mathbf{x}, u)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4(\mathbf{x}, u)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4(\mathbf{x}, u)}{\partial x_4} \end{bmatrix} \bigg|_{\mathbf{x}^*, u^*}$$

Elemen matriks \mathbf{A} dapat dituliskan dengan

$$f_1(\mathbf{x}, u) = x_3$$

$$\frac{\partial f_1(\mathbf{x}, u)}{\partial x_1} = 0 \quad \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, u)}{\partial x_2} = 0 \quad \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, u)}{\partial x_3} = 1 \quad \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, u)}{\partial x_4} = 0$$

$$f_2(\mathbf{x}, u) = x_4$$

$$\frac{\partial f_2(\mathbf{x}, u)}{\partial x_1} = 0 \quad \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, u)}{\partial x_2} = 0 \quad \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, u)}{\partial x_3} = 0 \quad \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, u)}{\partial x_4} = 1$$

$$f_3(\mathbf{x}, u) = \frac{a(u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2) + l \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{J + \mu l \sin^2 x_2}$$

$$\frac{\partial f_3(\mathbf{x}, u)}{\partial x_1} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_3(\mathbf{x}, u)}{\partial x_2} &= \frac{(-a\mu x_4^2 \cos x_2 + \mu g l \cos 2x_2 + f_p l x_4 \sin x_2)(J + \mu l \sin^2 x_2)}{(J + \mu l \sin^2 x_2)^2} \\ &= \frac{(a(u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2) + l \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4))(\mu l \sin 2x_2)}{(J + \mu l \sin^2 x_2)^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_3(\mathbf{x}, u)}{\partial x_3} = -\frac{a}{J + \mu l \sin^2 x_2} \frac{\partial T_c}{\partial x_3}$$

$$\frac{\partial f_3(\mathbf{x}, u)}{\partial x_4} = \frac{-2a\mu x_4 \sin x_2 - f_p l \cos x_2}{J + \mu l \sin^2 x_2}$$

$$f_4(\mathbf{x}, u) = \frac{l \cos x_2 (u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2) + \mu g \sin x_2 - f_p x_4}{J + \mu l \sin^2 x_2}$$

$$\frac{\partial f_4(\mathbf{x}, u)}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial f_4(\mathbf{x}, u)}{\partial x_2} = \frac{(l \sin x_2 (T_c - u) - \mu l x_4^2 \cos 2x_2)(J + \mu l \sin^2 x_2)}{(J + \mu l \sin^2 x_2)^2}$$

$$- \frac{(l \cos x_2 (u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2) + \mu g \sin x_2 - f_p x_4)(\mu l \sin 2x_2)}{(J + \mu l \sin^2 x_2)^2}$$

$$\frac{\partial f_4(\mathbf{x}, u)}{\partial x_3} = \frac{l \cos x_2}{J + \mu l \sin^2 x_2} \frac{\partial T_c}{\partial x_3}$$

$$\frac{\partial f_4(\mathbf{x}, u)}{\partial x_4} = \frac{-2\mu l x_4 \sin x_2 \cos x_2 - f_p}{J + \mu l \sin^2 x_2}$$

dengan komponen $\partial T_c / \partial x_3$ adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial T_c(x_3)}{\partial x_3} = \begin{cases} (Y_c - F_c)/x_c, & x_3 < -x_c \\ (Y_c - F_s)[(2x_3/x_c^2) + 2/x_c], & -x_c \leq x_3 < -DZ_{cv} \\ F_s/DZ_{cv}, & -DZ_{cv} \leq x_3 < 0 \\ 0, & x_3 = 0 \\ F_s/DZ_{cv}, & 0 < x_3 \leq DZ_{cv} \\ (F_s - Y_c)[(2x_3/x_c^2) - 2/x_c], & DZ_{cv} < x_3 \leq x_c \\ (Y_c - F_c)/x_c, & x_c < x_3 \end{cases}$$

$$\mathbf{B} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)}{\partial u} \right|_{\mathbf{x}^*, u^*} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, u)}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, u)}{\partial u} \\ \frac{\partial f_3(\mathbf{x}, u)}{\partial u} \\ \frac{\partial f_4(\mathbf{x}, u)}{\partial u} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}^*, u^*}$$

Selanjutnya, elemen matriks \mathbf{B} dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}, u) &= x_3 \\ \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, u)}{\partial u} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(\mathbf{x}, u) &= x_4 \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, u)}{\partial u} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_3(\mathbf{x}, u) &= \frac{a(u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2) + l \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{J + \mu l \sin^2 x_2} \\ \frac{\partial f_3(\mathbf{x}, u)}{\partial u} &= \frac{a}{J + \mu l \sin^2 x_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_4(\mathbf{x}, u) &= \frac{l \cos x_2 (u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2) + \mu g \sin x_2 - f_p x_4}{J + \mu l \sin^2 x_2} \\ \frac{\partial f_4(\mathbf{x}, u)}{\partial u} &= \frac{l \cos x_2}{J + \mu l \sin^2 x_2} \end{aligned}$$

Dengan fungsi aljabar keluaran sistem adalah $h(\mathbf{x}, u) = x_1$, didapatkan matriks \mathbf{C}_t dan D

$$\mathbf{C}_t = \begin{bmatrix} \frac{\partial h(\mathbf{x}, u)}{\partial x_1} & \frac{\partial h(\mathbf{x}, u)}{\partial x_2} & \frac{\partial h(\mathbf{x}, u)}{\partial x_3} & \frac{\partial h(\mathbf{x}, u)}{\partial x_4} \end{bmatrix} \quad D = \frac{\partial h(\mathbf{x}, u)}{\partial u}$$

dengan elemen matriks \mathbf{C}_t dan D adalah sebagai berikut

$$\frac{\partial h(\mathbf{x}, u)}{\partial x_1} = 1 \quad \frac{\partial h(\mathbf{x}, u)}{\partial x_2} = 0 \quad \frac{\partial h(\mathbf{x}, u)}{\partial x_3} = 0 \quad \frac{\partial h(\mathbf{x}, u)}{\partial x_4} = 0$$

$$\frac{\partial h(\mathbf{x}, u)}{\partial u} = 0$$

Sehingga matriks \mathbf{C}_t dan D adalah

$$\mathbf{C}_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = 0$$



LAMPIRAN B

B.1 Program Perhitungan *Gain* Kontroler dan *Observer*

```
clc
clear

% Model Plant
[A1,B1,C1,D1] = linmod('inv_p',[0 0 0 0],0);
[A2,B2,C2,D2] = linmod('inv_p',[0 0.25 0 0],0);

C = eye(4);
Df = [0 1 0 0]';

% cek rank
rank1 = rank([A1 zeros(4,1);C Df]);
rank2 = rank([A2 zeros(4,1);C Df]);

rank_n1 = rank([eye(4)-A1;C]);
rank_n2 = rank([eye(4)-A2;C]);

% Model Kompensator
A = 0.1
f = 0.1
Ac = [0 1;-(2*pi*f)^2 0]
Bc = [0;A*2*pi*f]

% Matriks augmentasi kontroler
A1hat = [A1 zeros(4,2);-Bc*[1 0 0 0] Ac]
A2hat = [A2 zeros(4,2);-Bc*[1 0 0 0] Ac]

B1hat = [B1;0;0]
B2hat = [B2;0;0]

% Matriks augmentasi observer
A1bar = [A1 zeros(4,2);zeros(2,4) [0 0 ;1 0]];
A2bar = [A2 zeros(4,2);zeros(2,4) [0 0 ;1 0]];

B1bar = [B1;0;0];
```

```

B2bar = [B2;0;0];

Cbar = [C zeros(4,1) Df];
G = [0 0 0 0 1 0]';

Cp = 0.435*eye(6);
alfa = 250;
sin_obs = sin(30*pi/180);
cos_obs = cos(30*pi/180);

%% PMIO T-S FTC

% Observer 1
setlmis([])

p1 = lmivar(1,[6 1])
h1 = lmivar(2,[6 4])
gamma1 = lmivar(1,[1 1])

lmiterm([1 1 1 p1],-1,1)

lmiterm([2 1 1 p1],1,A1bar,'s')
lmiterm([2 1 1 h1],-1,Cbar,'s')
lmiterm([2 2 1 p1],G',1)
lmiterm([2 3 1 0],Cp)
lmiterm([2 2 2 gamma1],-1,1)
lmiterm([2 3 3 gamma1],-1,1)
%lmiterm([2 2 2 0],-gamma)
%lmiterm([2 3 3 0],-gamma)

% LMI pole region
lmiterm([3 1 1 p1],1,A1bar,'s')
lmiterm([3 1 1 h1],-1,Cbar,'s')
lmiterm([3 1 1 p1],2*alfa,1)

lmiterm([4 1 1 p1],sin_obs,A1bar,'s')
lmiterm([4 1 1 h1],-sin_obs,Cbar,'s')
lmiterm([4 1 2 p1],-cos_obs*A1bar',1)

```

```

lmiterm([4 1 2 p1],cos_obs,A1bar)
lmiterm([4 1 2 -h1],cos_obs*Cbar',1)
lmiterm([4 1 2 h1],-cos_obs,Cbar)
lmiterm([4 2 2 p1],sin_obs,A1bar,'s')
lmiterm([4 2 2 h1],-sin_obs,Cbar,'s')

lmiterm([-5 1 1 p1],1,A1bar,'s')
lmiterm([-5 1 1 h1],-1,Cbar,'s')
lmiterm([-5 1 1 p1],2*100,1)

lmisys1 = getlmis

c1 = mat2dec(lmisys1,zeros(6),zeros(6,4),1)
options1 = [100 0 0 0 0]

[copt1 xopt1] = mincx(lmisys1,c1,options1)
% [copt1 xopt1] = feasp(lmisys1)

P1 = dec2mat(lmisys1,xopt1,p1)
H1 = dec2mat(lmisys1,xopt1,h1)
Gamma1 = dec2mat(lmisys1,xopt1,gamma1)

L1 = inv(P1)*H1
pole_observer1 = eig(A1bar-L1*Cbar)

% Observer 2
setlmis([])

p2 = lmivar(1,[6 1])
h2 = lmivar(2,[6 4])
gamma2 = lmivar(1,[1 1])

lmiterm([1 1 1 p1],-1,1)

lmiterm([2 1 1 p1],1,A2bar,'s')
lmiterm([2 1 1 h2],-1,Cbar,'s')
lmiterm([2 2 1 p2],G',1)
lmiterm([2 3 1 0],Cp)

```



```

lmiterm([2 2 2 gamma2],-1,1)
lmiterm([2 3 3 gamma2],-1,1)

% LMI pole region
lmiterm([3 1 1 p2],1,A2bar,'s')
lmiterm([3 1 1 h2],-1,Cbar,'s')
lmiterm([3 1 1 p2],2*alfa,1)

lmiterm([4 1 1 p2],sin_obs,A2bar,'s')
lmiterm([4 1 1 h2],-sin_obs,Cbar,'s')
lmiterm([4 1 2 p2],-cos_obs*A2bar',1)
lmiterm([4 1 2 p2],cos_obs,A2bar)
lmiterm([4 1 2 -h2],cos_obs*Cbar',1)
lmiterm([4 1 2 h2],-cos_obs,Cbar)
lmiterm([4 2 2 p2],sin_obs,A2bar,'s')
lmiterm([4 2 2 h2],-sin_obs,Cbar,'s')

lmiterm([-5 1 1 p2],1,A2bar,'s')
lmiterm([-5 1 1 h2],-1,Cbar,'s')
lmiterm([-5 1 1 p2],2*100,1)

lmisys2 = getlmis

c2 = mat2dec(lmisys2,zeros(6),zeros(6,4),1)
options2 = [100 0 0 0 0]

[copt2 xopt2] = mincx(lmisys2,c2,options2)

P2 = dec2mat(lmisys2,xopt2,p2)
H2 = dec2mat(lmisys2,xopt2,h2)
Gamma2 = dec2mat(lmisys2,xopt2,gamma2)

L2 = inv(P2)*H2
pole_observer2 = eig(A2bar-L2*Cbar)

%% Perancangan Kontroler Kompensator

% mencari K dengan LMI

```

```

sin1 = sin(30*pi/180);
sin2 = sin(30*pi/180);
cos1 = cos(30*pi/180);
cos2 = cos(30*pi/180);
lambda1 = 0.8;
lambda2 = 0.8;

kq = 4640
kf = 4640

%% mencari K1
setlmis([]);

q1 = lmivar(1,[6 1]);
f1 = lmivar(2,[1 6]);

lmiterm([1 1 1 q1],-1,1);

lmiterm([2 1 1 q1],Alhat,1,'s');
lmiterm([2 1 1 f1],Blhat,1,'s');
lmiterm([2 1 1 q1],2*lambda1,1);

lmiterm([3 1 1 q1],sin1*Alhat,1,'s');
lmiterm([3 1 1 f1],sin1*Blhat,1,'s');
lmiterm([3 1 2 q1],cos1*Alhat,1);
lmiterm([3 1 2 q1],-cos1,Alhat');
lmiterm([3 1 2 f1],cos1*Blhat,1);
lmiterm([3 1 2 -f1],-cos1,Blhat');
lmiterm([3 2 2 q1],sin1*Alhat,1,'s');
lmiterm([3 2 2 f1],sin1*Blhat,1,'s');

lmiterm([4 1 1 0],-kf)
lmiterm([4 1 2 -f1],1,1)
lmiterm([4 2 2 0],-1)

lmiterm([-5 1 1 q1],1,1)
lmiterm([-5 1 2 0],1)
lmiterm([-5 2 2 0],kq)

```

```

lmisys1 = getlmis;
[tmin1, xfeas1] = feasp(lmisys1);
Q1 = dec2mat(lmisys1,xfeas1,q1);
F1 = dec2mat(lmisys1,xfeas1,f1);
K1 = F1*inv(Q1);
pole_kontroler1 = eig(A1hat+B1hat*K1)

```

```

%% mencari K2
setlmis([]);

```

```

q2 = lmivar(1,[6 1]);
f2 = lmivar(2,[1 6]);

```

```

lmiterm([1 1 1 q2],-1,1);

```

```

lmiterm([2 1 1 q2],A2hat,1,'s');
lmiterm([2 1 1 f2],B2hat,1,'s');
lmiterm([2 1 1 q2],2*lambda2,1);

```

```

lmiterm([3 1 1 q2],sin2*A2hat,1,'s');
lmiterm([3 1 1 f2],sin2*B2hat,1,'s');
lmiterm([3 1 2 q2],cos2*A2hat,1);
lmiterm([3 1 2 q2],-cos2,A2hat');
lmiterm([3 1 2 f2],cos2*B2hat,1);
lmiterm([3 1 2 -f2],-cos2,B2hat');
lmiterm([3 2 2 q2],sin2*A2hat,1,'s');
lmiterm([3 2 2 f2],sin2*B2hat,1,'s');

```

```

lmiterm([4 1 1 0],-kf)
lmiterm([4 1 2 -f2],1,1)
lmiterm([4 2 2 0],-1)

```

```

lmiterm([-5 1 1 q2],1,1)
lmiterm([-5 1 2 0],1)
lmiterm([-5 2 2 0],kq)

```

```

lmisys2 = getlmis;

```

```
[tmin2, xfeas2] = feasp(lmisys2);
Q2 = dec2mat(lmisys2,xfeas2,q2);
F2 = dec2mat(lmisys2,xfeas2,f2)
K2 = F2*inv(Q2);

pole_kontroler1,tmin1
pole_kontroler2 = eig(A2hat+B2hat*K2),tmin2
```

```
K1
K2
```

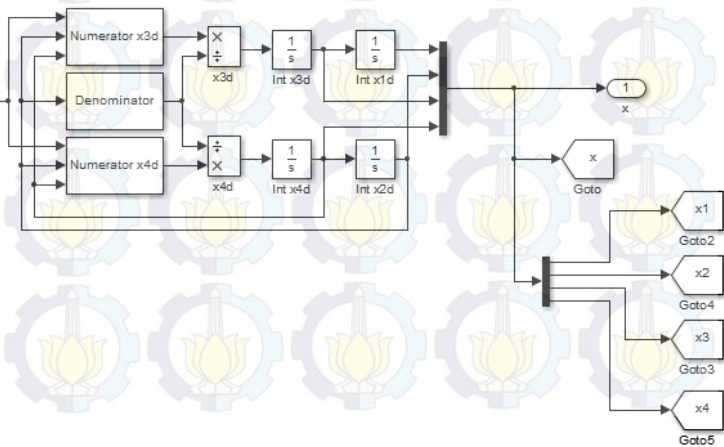
```
Kc1 = K1(5:6)
K1 = K1(1:4)
```

```
Kc2 = K2(5:6)
K2 = K2(1:4)
```

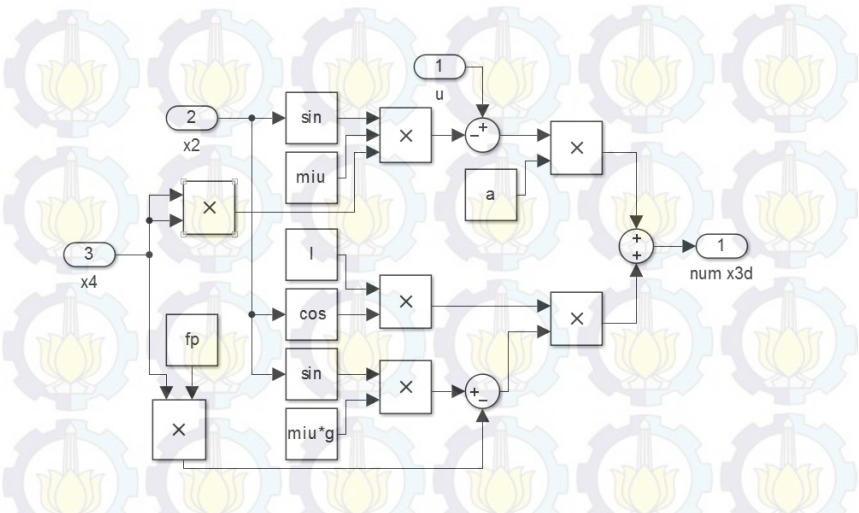
```
pole_kontroler1,tmin1
pole_kontroler2,tmin2
```

B.2 Blok Diagram Simulink

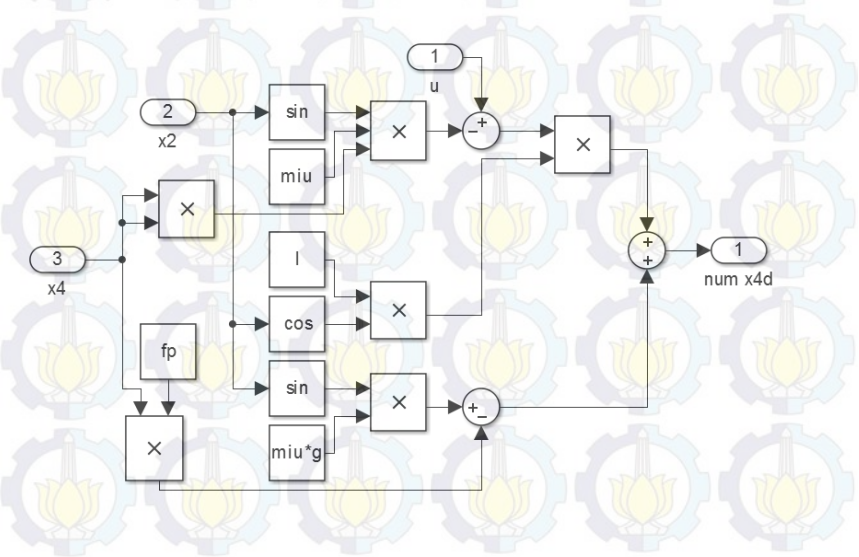
1. Blok Sistem Pendulum Kereta



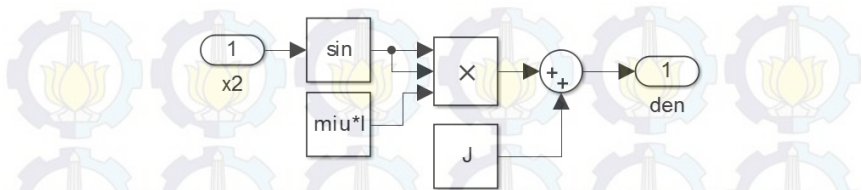
2. Blok Numerator x3d



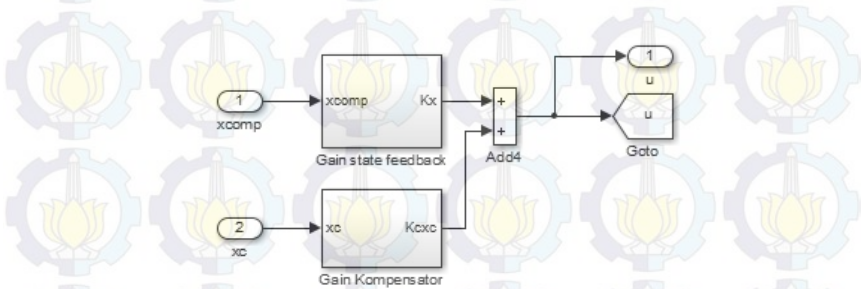
3. Blok Numerator x4d Denominator



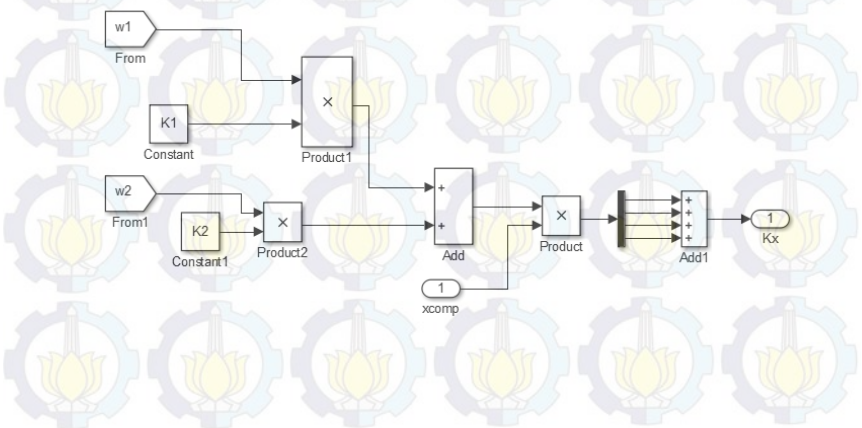
4. Blok Numerator x4d



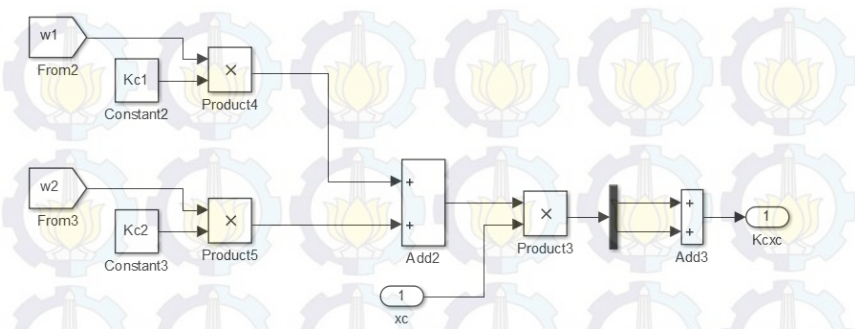
5. Blok Kontroler State Feedback Fuzzy T-S



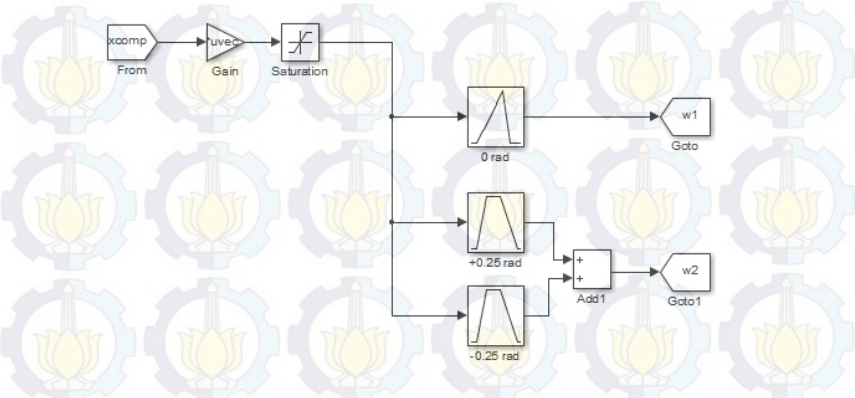
6. Blok Gain State Feedback



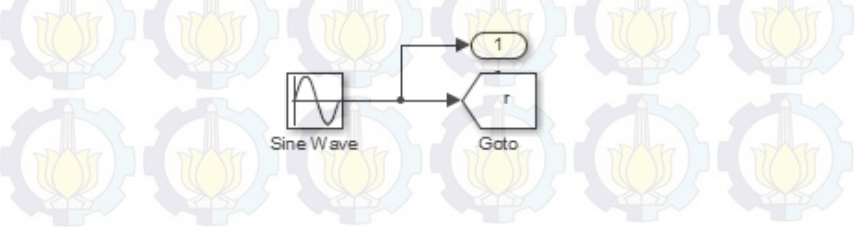
7. Blok *Gain* Kompensator



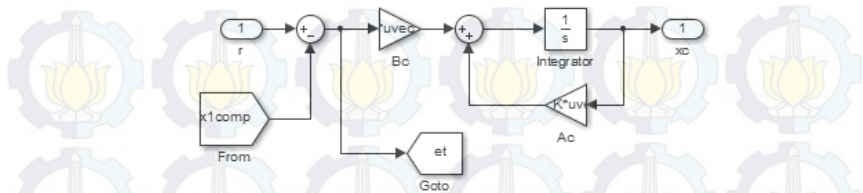
8. Blok Fungsi Keanggotaan



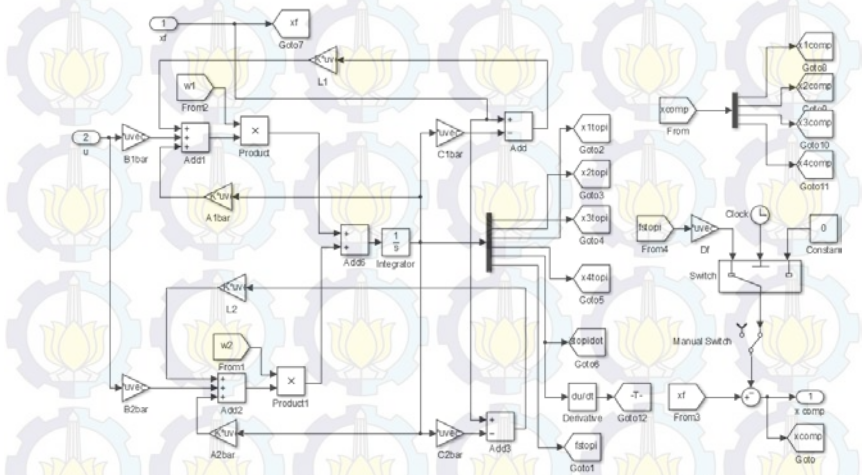
9. Blok Referensi



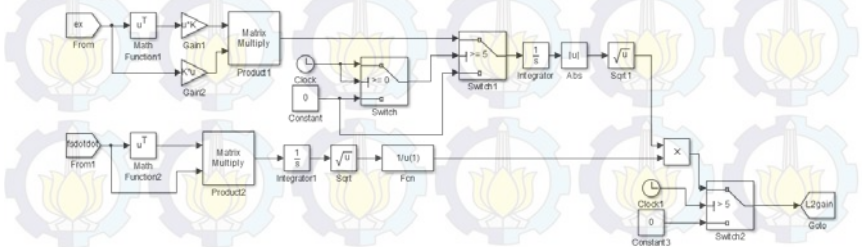
10. Blok Kompensator



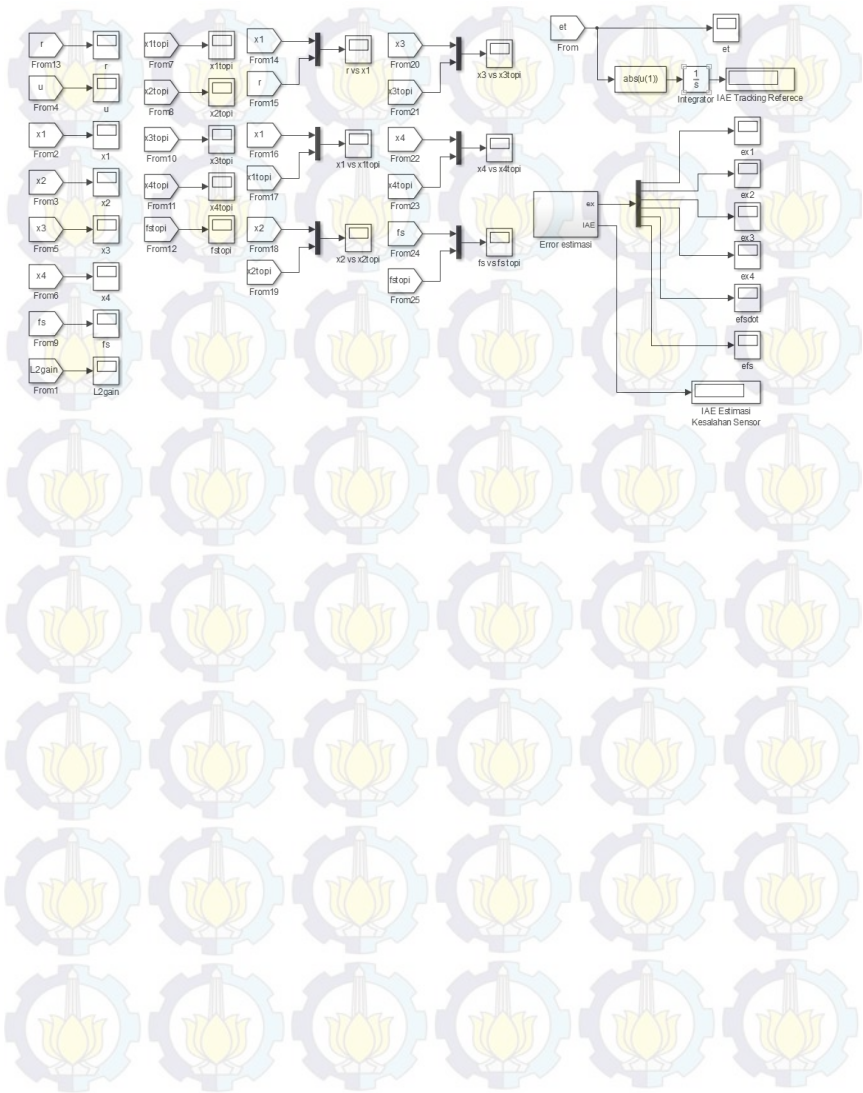
11. Blok PMIO Fuzzy T-S



12. Blok L2-Gain



13. Blok Scope



KOMPENSASI KESALAHAN SENSOR MENGGUNAKAN *PROPORTIONAL MULTIPLE INTEGRAL OBSERVER* (PMIO) PADA KONTROL *TRACKING* SISTEM PENDULUM KERETA

Nama : Aldhino Putra
Pembimbing : Dr. Trihastuti Agustinah, S.T., M.T.

ABSTRAK

Sistem Pendulum Kereta sebagai sistem nonlinear direpresentasikan ke dalam model *fuzzy* Takagi-Sugeno (T-S). *Proportional Multiple Integral Observer* (PMIO) disusun untuk mengestimasi *state* sistem dan kesalahan sensor berdasarkan model *fuzzy* T-S. Dengan menggunakan analisa kestabilan Lyapunov dan performa H_∞ , PMIO yang dirancang mampu menjamin kestabilan sistem dan juga mampu untuk melemahkan pengaruh turunan ke- q kesalahan sensor pada *error* estimasi *state* sistem augmentasi di bawah level pelemahan yang telah ditentukan. Agar estimasi *state* sistem dan kesalahan sensor mampu diestimasi secara cepat dengan nilai *maximum overshoot* dan *settling time* yang diinginkan, maka *pole* PMIO diletakkan pada daerah D yang berada di sebelah kiri sumbu imajiner menggunakan LMI *region*. Dengan melakukan beberapa pengujian pada implementasi berupa *fault free case*, *bias faults* dan *loss of measurement* pada sensor posisi pendulum, PMIO hasil perancangan mampu mengestimasi kesalahan sensor dan mampu mengembalikan performa sistem ke keadaan nominalnya dengan IAE hasil kompensasi sebesar 0,3047 saat *fault free case*; 0,3339 saat *bias fault* dan 0,4097 saat *loss of measurement*.

Kata Kunci : *Fuzzy* Takagi-Sugeno, Kesalahan Sensor, Kontrol Toleransi Kesalahan, *Linear Matrix Inequality* (LMI), *Proportional Multiple Integral Observer* (PMIO), Sistem Pendulum Kereta



SENSOR FAULT COMPENSATION USING PROPORTIONAL MULTIPLE INTEGRAL OBSERVER (PMIO) FOR TRACKING CONTROL OF THE PENDULUM-CART SYSTEM

Name : Aldhino Putra

Supervisor : Dr. Trihastuti Agustinah, S.T., M.T.

ABSTRACT

The pendulum cart system as a nonlinear system is represented to T-S fuzzy model. Proportional Multiple Integral Observer (PMIO) is designed to estimate state system and sensor fault based on T-S fuzzy model. By using Lyapunov stability analysis and H_∞ performance, the designed PMIO capable to ensure stability of the system and attenuate the effect of the q^{th} derivative of sensor fault on the estimation error below a predetermined attenuation level. In order to state estimation and sensor fault capable to be estimated rapidly with desired maximum overshoot and settling time, the pole of PMIO is placed on the D area that located at the left of the imaginary axis using LMI region. By doing several test such as fault free case, bias fault, and loss of measurement, the designed PMIO is able to estimate sensor fault simultaneously and be able to restore system's performance back to its nominal condition with IAE 0.3047 when fault free case, 0.3339 when bias fault and 0.4097 when loss of measurement.

Keywords : *Fault Tolerant Control (FTC), Linear Matrix Inequality (LMI), Pendulum-Cart System, Proportional Multiple Integral Observer (PMIO), Sensor Fault, Takagi-Sugeno Fuzzy.*



KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT karena atas segala rahmat, taufik, dan hidayah-Nya sehingga Tugas Akhir ini dapat terselesaikan dengan baik. Shalawat dan salam juga penulis sampaikan kepada Rasulullah Muhammad SAW yang telah menjadi teladan bagi penulis.

Tugas Akhir ini disusun untuk memenuhi sebagian persyaratan guna menyelesaikan pendidikan Strata-1 pada Bidang Studi Teknik Sistem Pengaturan, Jurusan Teknik Elektro, Fakultas Teknologi Industri, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya dengan judul:

KOMPENSASI KESALAHAN SENSOR MENGGUNAKAN *PROPORTIONAL MULTIPLE INTEGRAL OBSERVER (PMIO)* PADA KONTROL *TRACKING* SISTEM PENDULUM KERETA

Pada kesempatan ini penulis menyampaikan terima kasih atas segala bantuan dan dukungannya yang telah diberikan selama proses penyusunan Tugas Akhir ini kepada:

1. Kedua orang tua dan kedua kakak atas dukungan yang telah diberikan baik spiritual maupun material yang tak ternilai harganya.
2. Ibu Dr. Trihastuti, ST., MT. selaku dosen pembimbing yang telah memberikan ilmu dan bimbingannya secara sabar dan penuh perhatian kepada penulis.
3. Teman-teman seperjuangan, Agung, Dahlan, Yoga, Hendro, Muji, Fandri, Ardiansyah, Alif, Fasih, dan Adi yang telah memberikan dukungan dan bantuan dengan ikhlas.

Penulis menyadari bahwa pengerjaan Tugas Akhir ini masih jauh dari sempurna. Kritik dan saran yang membangun akan diterima dengan senang hati. Akhir kata, semoga Tugas Akhir ini dapat memberikan manfaat dalam pengembangan ilmu pengetahuan dan teknologi.

Surabaya, Juli 2015

Penulis

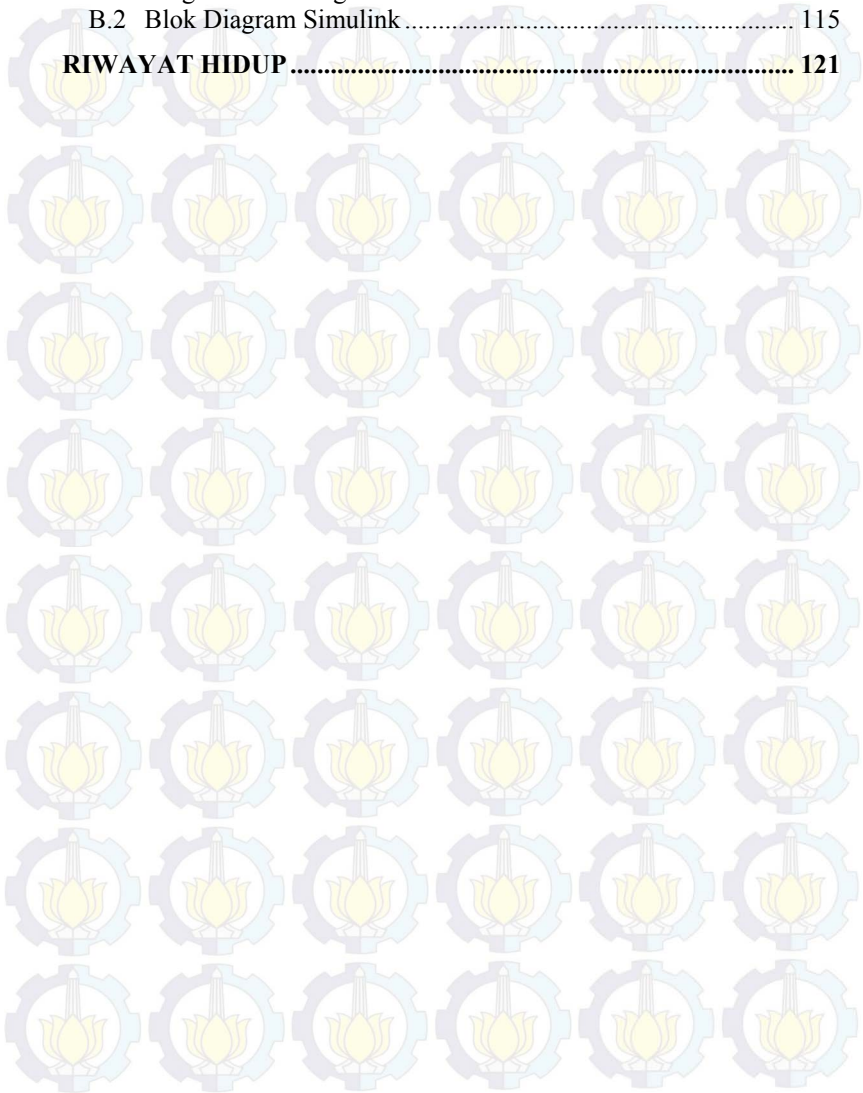


DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
PERNYATAAN KEASLIAN TUGAS AKHIR.....	iii
HALAMAN PENGESAHAN.....	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT.....	ix
KATA PENGANTAR.....	xi
DAFTAR ISI.....	xiii
DAFTAR GAMBAR.....	xvii
DAFTAR TABEL	xxi
DAFTAR NOTASI DAN SIMBOL	xxiii
KONVENSI PENULISAN TUGAS AKHIR	xxv
BAB 1 PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Perumusan Masalah.....	2
1.3 Batasan Masalah.....	3
1.4 Tujuan Penelitian.....	3
1.5 Metodologi Penelitian.....	3
1.6 Sistematika Penulisan.....	4
1.7 Relevansi	5
BAB 2 TEORI PENUNJANG	7
2.1 Tinjauan Pustaka.....	7
2.2 Kontrol Toleransi Kesalahan	8
2.3 Sistem Pendulum Kereta.....	11
2.4 Linearisasi.....	15
2.5 Logika <i>Fuzzy</i>	18
2.5.1 Fungsi Keanggotaan.....	18
2.5.2 Operasi Himpunan <i>Fuzzy</i>	22
2.5.3 Mekanisme Inferensi <i>Fuzzy</i>	23
2.6 Model <i>Fuzzy</i> Takagi-Sugeno	25
2.7 Kontroler <i>State Feedback</i> dengan Kompensator.....	27
2.8 Analisa Kestabilan Lyapunov	28
2.9 <i>Linear Matrix Inequality</i> (LMI).....	30
2.10 <i>Proportional Multiple Integral Observer</i> (PMIO).....	32
2.11 Performa H_{∞}	34
2.12 <i>Pole Placement</i> pada LMI Region	36

2.13 Batasan untuk Optimasi <i>Gain</i>	39
BAB 3 PERANCANGAN SISTEM KONTROL	41
3.1 Linearisasi Sistem Pendulum Kereta	41
3.2 Pemodelan <i>Fuzzy</i> Takagi-Sugeno	43
3.3 Kompensator	44
3.4 Perancangan Kontroler <i>State Feedback</i> Kompensator <i>Fuzzy</i> T-S.....	45
3.4.1 <i>Augmented Fuzzy System</i> Kontroler	45
3.4.2 <i>Pole Placement</i> Kontroler pada <i>LMI Region</i>	46
3.4.3 Batasan <i>Gain</i> Kontroler	47
3.4.4 <i>Gain</i> Kontroler Hasil Desain	47
3.5 Perancangan <i>Proportional Multiple Integral Observer</i> (PMIO) <i>Fuzzy</i> T-S.....	48
3.5.1 <i>Augmented Fuzzy System Observer</i>	49
3.5.2 Kestabilan Lyapunov PMI <i>Observer</i>	50
3.5.3 Performa H_{∞} PMI <i>Observer</i>	52
3.5.4 <i>Pole Placement</i> PMI <i>Observer</i> pada <i>LMI Region</i>	55
3.5.5 <i>Gain</i> PMI <i>Observer</i> Hasil Desain	55
3.6 Diagram Simulink untuk Simulasi dan Implementasi	57
BAB 4 PENGUJIAN DAN ANALISIS DATA	61
4.1 Hasil Simulasi.....	61
4.1.1 Keadaan Nominal (<i>Fault Free Case</i>).....	62
4.1.2 Pengujian <i>Bias Sensor Faults</i> ($\alpha_i = 1$ dan $\beta_i \neq 0$)	65
4.1.3 Pengujian <i>Loss of Sensitivity</i> ($0 \leq \alpha_i \leq 1$ dan $\beta_i = 0$)	71
4.1.4 Pengujian <i>Loss of Measurement</i> ($\alpha_i = 0$ dan $\beta_i = 0$)	75
4.1.5 Pengujian <i>Stuck Sensor Reading</i> ($\alpha_i = 0$ dan $\beta_i \neq 0$)	78
4.2 Hasil Implementasi	81
4.2.1 Keadaan Nominal	82
4.2.2 Pengujian <i>Bias Sensor Faults</i> ($\alpha_i = 1$ dan $\beta_i \neq 0$)	86
4.2.3 Pengujian <i>Loss of Measurement</i> ($\alpha_i = 0$ dan $\beta_i = 0$)	89
BAB 5 PENUTUP	93
5.1 Kesimpulan.....	93
5.2 Saran.....	93
DAFTAR PUSTAKA	95
LAMPIRAN A	97
A.1 Penurunan Model Matematika Sistem Pendulum Kereta	97
A.2 Elemen Matriks Linearisasi Model Sistem Pendulum Kereta	103

LAMPIRAN B.....	109
B.1 Program Perhitungan <i>Gain</i> Kontroler dan <i>Observer</i>	109
B.2 Blok Diagram Simulink	115
RIWAYAT HIDUP	121





Halaman ini sengaja dikosongkan

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1	Kategori Kesalahan Sensor	11
Tabel 3.1	Parameter Desain Kontroler	48
Tabel 4.1	Perbandingan <i>Eigen Value</i> Sistem dan <i>Observer</i>	61
Tabel 4.2	Karakteristik Respon Sistem Saat Keadaan Nominal	65
Tabel 4.3	Karakteristik Estimasi Kesalahan Bias	67
Tabel 4.4	Perbandingan IAE <i>Tracking</i> Sinyal Referensi	70
Tabel 4.5	Perbandingan Respon Posisi Kereta <i>Faulty</i> dan Kompensasi	73
Tabel 4.6	Karakteristik Sistem <i>Faulty</i> dan Sistem Dengan Kompensasi	78
Tabel 4.7	Karakteristik Respon Sistem Saat Keadaan Nominal	84
Tabel 4.8	Spesifikasi Respon Sistem Saat <i>Fault Free Case</i> dengan Kompensasi	86
Tabel 4.9	Spesifikasi Respon Sistem Saat Terjadi <i>Bias Fault</i>	89
Tabel 4.10	Spesifikasi Respon Sistem Saat Terjadi <i>Loss of Measurement</i>	92
Tabel A.1	Parameter-Parameter Sistem Pendulum Kereta	103



DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Klasifikasi Kesalahan Berdasarkan Waktu Terjadinya ...	9
Gambar 2.2	Pemodelan Kesalahan	9
Gambar 2.3	Komponen Penyusun Sistem Pendulum Kereta	12
Gambar 2.4	Pemodelan Sistem Pendulum Kereta	13
Gambar 2.5	Gaya-Gaya yang Bekerja pada Sistem Pendulum Kereta	13
Gambar 2.6	Fungsi Keanggotaan <i>Triangular</i> dengan $(a, b, c) = (-0,2; 0; 0,2)$	19
Gambar 2.7	Fungsi Keanggotaan <i>Trapezoidal</i> dengan $(a, b, c, d) = (-0,2; -0,1; 0,1; 0,2)$	20
Gambar 2.8	Fungsi Keanggotaan <i>Gaussian</i> dengan $(\mu, \sigma) = (0; 0,08)$	21
Gambar 2.9	Fungsi Keanggotaan <i>Generalized Bell</i> dengan $(a, b, c) = (0,2; 7; 0)$	21
Gambar 2.10	Mekanisme Inferensi <i>Fuzzy</i>	24
Gambar 2.11	Skema <i>Parallel Distributed Compensation</i> (PDC)	27
Gambar 2.12	Kontrol <i>State Feedback Fuzzy T-S</i> dengan Kompensator	28
Gambar 2.13	Struktur <i>Proportional Multiple Integral Observer</i> (PMIO)	33
Gambar 2.14	Konfigurasi Sistem Kontrol <i>Robust</i>	35
Gambar 2.15	<i>Pole Placement</i> pada LMI	36
Gambar 2.16	<i>Half Plane</i> dengan LMI <i>Region</i> di Sebelah Kiri $x = -\gamma o$	38
Gambar 2.17	Kerucut dengan LMI <i>Region</i> Berada di Dalam Kerucut	38
Gambar 2.18	Lingkaran dengan LMI <i>Region</i> Berada di Dalam Lingkaran	38
Gambar 3.1	Fungsi Keanggotaan <i>Plant</i> , Kontroler, dan <i>Observer</i> ...	44
Gambar 3.2	Struktur Kontroler <i>State Feedback</i> Kompensator <i>Fuzzy T-S</i>	48
Gambar 3.3	Struktur PMI <i>Observer Fuzzy T-S</i>	50
Gambar 3.4	Skenario <i>Fault Tolerant Control</i> (FTC) Hasil Perancangan	58
Gambar 3.5	Diagram Simulink untuk Simulasi	58
Gambar 3.6	Diagram Simulink untuk Implementasi	59

Gambar 4.1	Respon Posisi Kereta dengan Berbagai <i>Initial Condition</i> pada Posisi Pendulum	62
Gambar 4.2	Respon Posisi Pendulum dengan Berbagai <i>Initial Condition</i> pada Posisi Pendulum	63
Gambar 4.3	Sinyal Kontrol dengan Berbagai <i>Initial Condition</i> pada Posisi Pendulum	63
Gambar 4.4	Respon Posisi Kereta dengan <i>Initial Condition</i> pada Posisi Pendulum dan Kecepatan Pendulum	64
Gambar 4.5	Respon Posisi Pendulum dengan <i>Initial Condition</i> pada Posisi Pendulum dan Kecepatan Pendulum.....	64
Gambar 4.6	Sinyal Kontrol dengan <i>Initial Condition</i> pada Posisi Pendulum dan Kecepatan Pendulum.....	64
Gambar 4.7	<i>Bias Sensor Fault</i> dan Estimasinya Saat $0 \leq t \leq 1$ detik.....	66
Gambar 4.8	<i>Bias Sensor Fault</i> dan Estimasinya Saat $5 \leq t \leq 30$ detik.....	66
Gambar 4.9	Respon Posisi Kereta <i>Faulty</i> dan Kompensasi	67
Gambar 4.10	Respon Posisi Pendulum <i>Faulty</i> dan Kompensasi	68
Gambar 4.11	Sinyal Kontrol Saat $0 \leq t \leq 5$ detik.....	68
Gambar 4.12	Sinyal Kontrol Saat $5 \leq t \leq 30$ detik.....	68
Gambar 4.13	Sinyal Kontrol Kompensasi dengan <i>Initial Condition</i> $x_2 = 0,2$ rad dan $x_4 = -0,5$ rad/detik Saat $0 \leq t \leq 10$ detik.....	69
Gambar 4.14	Sinyal Kontrol Kompensasi dengan <i>Initial Condition</i> $x_2 = 0,2$ rad dan $x_4 = -0,5$ rad/detik Saat $5 \leq t \leq 30$ detik.....	69
Gambar 4.15	Respon Posisi Kereta dengan Sinyal Kontrol Dibatasi ..	70
Gambar 4.16	Respon Posisi Pendulum dengan Sinyal Kontrol Dibatasi	71
Gambar 4.17	L_2 -Gain Simulasi Saat Terjadi Kesalahan Bias.....	71
Gambar 4.18	Respon Posisi Kereta <i>Faulty</i> dan Kompensasi	73
Gambar 4.19	Respon Posisi Pendulum <i>Faulty</i> dan Kompensasi	73
Gambar 4.20	Sinyal Kontrol <i>Faulty</i> dan Kompensasi	74
Gambar 4.21	Estimasi Kesalahan Sensor	74
Gambar 4.22	L_2 -Gain Saat Terjadi <i>Loss of Sensitivity</i>	74
Gambar 4.23	Perbandingan Respon Posisi Kereta <i>Faulty</i> dengan Respon Posisi Kereta Kompensasi.....	76
Gambar 4.24	Respon Posisi Pendulum Saat <i>Faulty</i> dan Kompensasi ..	76
Gambar 4.25	Estimasi Kesalahan <i>Loss of Measurement</i>	77

Gambar 4.26	Perbandingan Sinyal Kontrol <i>Faulty</i> dan Sinyal Kontrol Kompensasi.....	77
Gambar 4.27	L_2 -Gain Saat Terjadi <i>Loss of Measurement</i>	77
Gambar 4.28	Respon Posisi Kereta <i>Faulty</i> dan Kompensasi.....	79
Gambar 4.29	Respon Posisi Pendulum <i>Faulty</i> dan Kompensasi	80
Gambar 4.30	Sinyal Kontrol <i>Faulty</i>	80
Gambar 4.31	Estimasi Kesalahan Sensor Saat <i>Stuck Sensor Reading</i>	80
Gambar 4.32	L_2 -Gain Simulasi Saat <i>Stuck Sensor Reading</i>	81
Gambar 4.33	Respon Posisi Kereta Saat Keadaan Nominal	83
Gambar 4.34	Respon Posisi Pendulum Saat Nominal	83
Gambar 4.35	Sinyal Kontrol Saat Keadaan Nominal	83
Gambar 4.36	Estimasi Kesalahan Saat <i>Fault Free Case</i>	84
Gambar 4.37	Respon Posisi Kereta dengan Kompensasi	85
Gambar 4.38	Respon Posisi Pendulum dengan Kompensasi	85
Gambar 4.39	Sinyal Kontrol dengan Kompensasi	85
Gambar 4.40	Estimasi <i>Bias fault</i>	87
Gambar 4.41	Respon Posisi Kereta <i>Faulty</i> dan Kompensasi.....	87
Gambar 4.42	Respon Posisi Pendulum Saat <i>Faulty</i> dan Kompensasi	87
Gambar 4.43	Sinyal Kontrol <i>Faulty</i> dan Kompensasi	88
Gambar 4.44	L_2 -Gain Saat Terjadi <i>Bias Fault</i>	88
Gambar 4.45	Estimasi Kesalahan <i>Loss of Measurement</i>	90
Gambar 4.46	Respon Posisi Kereta <i>Faulty</i> dan Kompensasi.....	90
Gambar 4.47	Respon Posisi Pendulum <i>Faulty</i> dan Kompensasi	91
Gambar 4.48	Sinyal Kontrol <i>Faulty</i> dan Kompensasi	91
Gambar 4.49	L_2 -Gain Saat Terjadi <i>Loss of Measurement</i>	91
Gambar A.1	Ilustrasi Pendulum.....	100
Gambar A.2	Ilustrasi Momen Inersia Sistem Pendulum Kereta	100
Gambar A.3	Gaya Gesek T_c Terhadap Kecepatan Kereta x_3	102



DAFTAR NOTASI DAN SIMBOL

\mathbf{x}	Vektor <i>state</i> x
x_n	<i>State</i> ke- n
\dot{x}_n	Turunan pertama <i>state</i> ke- n
\mathbf{x}_c	Vektor <i>state</i> kompensator
f_s	Kesalahan sensor
f_s^q	Turunan ke- q dari kesalahan sensor
α	penurunan sensitivitas sensor
β	kesalahan bias
\mathbf{x}_f	Vektor <i>state faulty</i>
$\bar{\mathbf{x}}$	Vektor <i>state</i> estimasi <i>observer</i>
\in	Anggota himpunan
\notin	Bukan anggota himpunan
\mathbf{I}	Matriks Identitas
\mathbf{A}^T	Transpos matriks \mathbf{A}
\mathbf{A}^{-1}	Invers matriks \mathbf{A}
$\mathbf{A} > 0$	Matriks \mathbf{A} definit positif
$\mathbf{A} < 0$	Matriks \mathbf{A} definit negatif
$\text{diag}(f_1, \dots, f_n)$	Matriks diagonal dengan f_n merupakan elemen diagonal ke- n
γ_{pmi}	Tingkat pelemahan
γ_k	batas <i>pole</i> terbesar kontroler
θ_k	batas sudut <i>pole</i> imajiner kontroler
γ_{obs}	batas <i>pole</i> terbesar <i>observer</i>
θ_{obs}	batas sudut <i>pole</i> imajiner <i>observer</i>
∞	<i>Infinity</i>
$ \mathbf{A} $	Determinan matriks \mathbf{A}
$\ \cdot\ _\infty$	∞ -norm
$\ \cdot\ _2$	L_2 -norm
\sup	Supremum
sgn	Fungsi signum
$\sum(\cdot)$	Penjumlahan dari nilai deret
$\prod(\cdot)$	Perkalian dari nilai deret
$\frac{d}{dx}(\cdot)$	Turunan pertama terhadap x



KONVENSI PENULISAN TUGAS AKHIR

1. Matriks dinyatakan dengan huruf kapital dan tebal. Contoh: **A**, **B**, **C**, **D**.
2. Vektor dinyatakan dengan huruf kecil dan tebal. Contoh: **x**, **y**, **z**.
3. Matriks dengan tanda *tilde* atau *bar* menyatakan matriks yang tersusun atas beberapa matriks lain. Contoh: **\tilde{A}** , **\bar{B}** .
4. Himpunan dinyatakan dengan huruf kapital, miring, dan tidak tebal. Contoh: *X*.
5. Elemen anggota himpunan dinyatakan dengan huruf kecil, miring, dan tidak tebal. Contoh: x_1 , x_2 , x_3 .
6. Variabel bukan matriks ataupun vektor dinyatakan dengan huruf kapital/kecil, miring, dan tidak tebal. Contoh: Gaya (*F*), massa (*m*), dan sebagainya.



RIWAYAT HIDUP



Aldhino Putra lahir di Tulungagung pada tanggal 18 Juli 1993. Penulis merupakan anak ketiga dari pasangan Lang Satriyanto dan Sri Nugroho. Penulis mengenyam bangku pendidikan di SDN 3 Pojok, SMPN 1 Tulungagung, dan SMAN 1 Kauman. Setelah lulus SMA, penulis melanjutkan pendidikannya di Jurusan Teknik Elektro, Fakultas Teknologi Industri, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya melalui jalur SNMPTN tulis pada tahun 2011. Selama menjalani studi di Jurusan Teknik Elektro ini, penulis memilih Teknik Sistem Pengaturan sebagai bidang studi yang ditekuni. Pada bulan Juni 2015, penulis mengikuti seminar dan ujian Tugas Akhir sebagai salah satu persyaratan untuk memperoleh gelar Sarjana Teknik Elektro. Penulis dapat dihubungi pada alamat email aldhinoput@gmail.com.



BAB 1

PENDAHULUAN

Pada bab ini diuraikan mengenai latar belakang permasalahan, penegasan dan alasan pemilihan judul penelitian. Uraian tersebut dibagi ke dalam beberapa subbab diantaranya adalah latar belakang, perumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, metodologi penelitian, sistematika penulisan, dan relevansi.

1.1 Latar Belakang

Suatu sistem kontrol atau proses otomatisasi pada industri membutuhkan performa yang baik untuk meningkatkan kualitas produk. Namun, semakin banyak proses yang dikontrol membuat kemungkinan terjadinya kesalahan sensor maupun aktuator semakin besar. Kesalahan tersebut mengakibatkan sistem tidak stabil, kualitas produk menurun, tingkat keamanan menurun, sistem *shutdown*, serta rugi biaya. Kesalahan sensor maupun aktuator juga dapat terjadi seiring bertambahnya umur sensor dan aktuator itu sendiri. Terjadinya kesalahan pada sensor maupun aktuator dapat diatasi dengan melakukan perbaikan atau penggantian komponen. Namun, hal tersebut memiliki kekurangan, yaitu membutuhkan waktu yang lama serta memiliki resiko yang besar dikarenakan tingkat keamanan sistem menurun. Oleh karena itu diperlukan strategi kontrol yang mampu mengembalikan performa sistem pada performa nominalnya walaupun terjadi kesalahan. Strategi kontrol ini disebut dengan *Fault Tolerant Control* (FTC). Perancangan FTC membutuhkan *fault detection and isolation* (FDI) yang cepat untuk memberikan keputusan yang tepat saat sistem mengalami kesalahan [1].

Selama beberapa dekade terakhir, beberapa penelitian mengenai FTC banyak ditemukan pada jurnal internasional. Pada [2], FTC berbasis model disusun dengan melakukan pendekatan *fuzzy* T-S. Dengan membuat kesalahan sebagai *state* tambahan, maka dapat disusun suatu *augmented fuzzy system* dan disusunlah H_∞ *observer*. *Observer* tersebut mampu untuk mengestimasi *state* sistem dan kesalahan sensor. Namun, skema ini tidak dapat diterapkan pada sistem yang tidak stabil.

FTC dirancang dengan menggunakan sistem deskriptor dengan *Lipschitz constraint*. Pada skema ini bagian linear dan nonlinear dari sistem dipisahkan. Dari pemisahan tersebut dapat dibuat suatu sistem deskriptor. Berdasarkan parameter-parameter pada sistem deskriptor

dirancang suatu *state-space nonlinear estimator*. *State-space nonlinear estimator* akan mendeteksi kesalahan sensor dan menghitung besarnya nilai kesalahan sensor. Skema FTC ini kemudian disimulasikan pada motor DC dengan kontroler *gain state-feedback*. Hasil yang didapat adalah skema tersebut berhasil mendeteksi dan menghitung besarnya nilai kesalahan dari kesalahan sensor. Akan tetapi metode ini tidak dapat diaplikasikan pada sistem yang tidak stabil [3].

Sistem nonlinear didekati menjadi beberapa sistem linear melalui linearisasi. Diasumsikan kesalahan sensor merupakan sinyal yang memiliki dinamika tak tentu sehingga dibutuhkan pengamatan lebih terhadap derivatif dari sinyal kesalahan sensor. Derivatif sinyal kesalahan sensor ke- q dijadikan sebagai *state* tambahan yang nantinya akan disusun suatu sistem augmentasi. *Proportional Multiple Integral Observer* (PMIO) dengan pendekatan *fuzzy T-S* dirancang untuk memberikan estimasi *state* sistem dan kesalahan sensor hingga derivatif ke- q secara simultan. Desain *observer fuzzy T-S* ini mampu diterapkan pada sistem yang tidak stabil. Performa H_∞ juga digunakan untuk membuktikan bahwa *observer* hasil rancangan mampu memberikan nilai *error* estimasi mendekati nol saat $t \rightarrow \infty$. *Linear Matrix Inequality* (LMI) *pole region* digunakan untuk meletakkan *closed loop poles* dari *observer* berada jauh di sebelah kiri sumbu imajiner. Akibatnya PMIO mampu mengestimasi *state* sistem dan kesalahan sensor hingga derivatif ke- q secara simultan [4].

Penerapan FTC pada Sistem Pendulum Kereta dipilih karena Sistem Pendulum Kereta merupakan sistem yang nonlinear dan tidak stabil. Terjadinya kesalahan sensor maupun aktuator pada Sistem Pendulum Kereta dapat menyebabkan posisi pendulum tidak berada pada posisi ekuilibriumnya, posisi kereta tidak sesuai dengan sinyal referensi, dan bahkan membuat sistem menjadi tidak stabil.

Oleh karena itu dalam tugas akhir ini akan dilakukan perancangan FTC dengan kesalahan sensor pada posisi pendulum. Kesalahan sensor diberikan dengan menjumlahkan suatu sinyal pada keluaran sensor sebelum sinyal tersebut diolah oleh kontroler. Kontroler nominal yang digunakan adalah Kontrol *Tracking Fuzzy* dengan menambahkan kompensator [5].

1.2 Perumusan Masalah

Terjadinya kesalahan pengukuran pada sensor dapat berakibat fatal pada Sistem Pendulum Kereta. Hal tersebut mengakibatkan posisi kereta

tidak sesuai dengan sinyal referensi, posisi pendulum tidak berada pada titik ekuilibriumnya, bahkan sistem menjadi tidak stabil. Oleh karena itu, perlu dirancang skenario kontrol yang mampu mengompensasi terjadinya kesalahan sensor, sehingga kestabilan Sistem Pendulum Kereta tetap terjaga pada performa nominalnya.

1.3 Batasan Masalah

Kesalahan sensor yang diberikan dibatasi pada *range* kerja yang dimiliki Sistem Pendulum Kereta yaitu sebesar $-0,4$ s/d $0,4$ m untuk posisi kereta dan $-0,4$ s/d $0,4$ rad untuk posisi pendulum. Hal ini dilakukan untuk menghindari respon posisi kereta dan posisi pendulum menjadi tidak stabil saat implementasi.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari pelaksanaan tugas akhir ini adalah merancang *Proportional Multiple Integral Observer* (PMIO) yang berfungsi untuk mengompensasi kesalahan sensor yang terjadi pada Sistem Pendulum Kereta. Diharapkan pengaruh dari kesalahan sensor dapat dilemahkan, sehingga kestabilan sistem tetap terjaga dan performa sistem tetap berada pada performa nominalnya. Hasil perancangan kemudian diimplementasikan pada *plant* nyata “Digital Pendulum Mechanical Unit 33-200”.

1.5 Metodologi Penelitian

Metodologi yang digunakan dalam menyusun tugas akhir ini diantaranya adalah

1. Studi Literatur

Literatur-literatur yang dipelajari guna menunjang pengerjaan tugas akhir ini diantaranya adalah Kontrol Toleransi Kesalahan, identifikasi *plant*, desain kontrol fuzzy T-S, kontrol *state feedback* dengan kompensator, analisa kestabilan Lyapunov, performa H_{∞} , *Proportional Multiple Integral Observer* (PMIO), *Linear Matrix Inequalities* (LMI), LMI *region*, dan batasan untuk optimasi *Gain*.

2. Pemodelan Sistem

Tahapan dalam memodelkan Sistem Pendulum Kereta ke dalam representasi *state space*.

3. Perancangan Kontroler

Tahapan menghitung nilai *gain* kontroler masing-masing model *fuzzy* T-S berdasarkan analisa kestabilan Lyapunov, LMI *region*, dan batasan untuk optimasi *gain*.

4. Perancangan *Observer*

Tahap menghitung nilai *gain observer* masing-masing model *fuzzy* T-S berdasarkan analisa kestabilan Lyapunov, performa H_∞ , dan LMI *region*.

5. Simulasi dan Implementasi

Hasil pemodelan sistem serta perancangan kontroler dan *observer* disimulasikan pada Simulink. Simulasi dilakukan dengan melakukan pengujian terhadap beberapa skenario kesalahan. Terakhir, implementasi pada *plant* nyata dilakukan.

6. Penulisan dan Penyusunan Buku Tugas Akhir

Keseluruhan pengerjaan tugas akhir ini ditulis ke dalam buku yang berupa laporan ilmiah.

1.6 Sistematika Penulisan

Pembahasan Tugas Akhir ini terdiri atas lima bab, yaitu Pendahuluan, Teori Penunjang, Perancangan Sistem Kontrol, Pengujian dan Analisis Data, serta Penutup

BAB 1 Pendahuluan

Bab ini meliputi latar belakang, perumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, metodologi penelitian, sistematika laporan, dan relevansi.

BAB 2 Teori Penunjang

Bab ini menjelaskan tentang tinjauan pustaka, kontrol toleransi kesalahan, Sistem Pendulum Kereta, linearisasi, logika *fuzzy*, model *fuzzy* T-S, kontroler *state feedback* dengan kompensator, analisa kestabilan Lyapunov, *linear matrix inequality* (LMI), *proportional multiple integral observer* (PMIO), performa H_∞ , LMI *region*, dan batasan *gain* kontroler.

BAB 3 Perancangan Sistem Kontrol

Pada bab ini membahas desain dan perancangan algoritma kontrol untuk kontrol toleransi kesalahan berdasarkan teori penunjang pada Bab 2.

BAB 4 Pengujian dan Analisis Data

Bab ini memuat hasil pengujian simulasi serta analisis data.

BAB 5 Penutup

Bab ini berisi kesimpulan dan saran dari hasil yang telah diperoleh.

1.7 Relevansi

Hasil yang diperoleh dari Tugas Akhir ini diharapkan menjadi referensi perencanaan dalam desain kontrol toleransi kesalahan sensor, pengembangan dan perbandingan metode kontrol toleransi kesalahan yang tepat untuk Sistem Pendulum Kereta di masa mendatang.



BAB 2

TEORI PENUNJANG

Pada bab ini dibahas mengenai teori penunjang yang digunakan dalam menyusun tugas akhir. Teori tersebut meliputi *Fault Tolerant Control* (FTC), Sistem Pendulum Kereta, logika *fuzzy*, analisa kestabilan Lyapunov, dan *Linear Matrix Inequality* (LMI).

2.1 Tinjauan Pustaka

Sistem kontrol sudah tidak asing lagi dalam kehidupan kita. Berbagai peralatan rumah tangga, transportasi, maupun industri menerapkan sistem kontrol untuk memudahkan pekerjaan kita. Namun sistem kontrol dapat bersifat tidak stabil serta membahayakan apabila terjadi kesalahan pada sistem tersebut meliputi kesalahan sensor, kesalahan aktuator, dan kesalahan komponen lain dalam sistem.

Strategi kontrol yang digunakan untuk menanggulangi adanya kesalahan pada sistem kontrol disebut dengan *Fault Tolerant Control* (FTC). FTC diklasifikasikan menjadi dua bagian utama yaitu *Passive Fault Tolerant Control* dan *Active Fault Tolerant Control*. *Passive Fault Tolerant Control* adalah strategi kontrol yang bertujuan untuk merancang kontroler yang tidak terpengaruh apabila terjadi kesalahan. Sedangkan *Active Fault Tolerant Control* adalah strategi kontrol yang berfungsi untuk melakukan desain ulang kontroler atau mengolah kembali data sebelum masuk ke kontroler saat terjadi kesalahan [1].

Sistem nonlinear didekati menjadi beberapa sistem linear melalui linearisasi kemudian pendekatan *fuzzy* T-S digunakan untuk menyusun H_{∞} *observer* yang akan mengestimasi *state* dan kesalahan sensor. Pendekatan sistem deskriptor digunakan untuk menyusun sistem augmentasi dengan kesalahan sensor sebagai vektor *state* tambahan. Namun, metode ini memiliki batasan-batasan yakni tidak dapat diterapkan pada sistem yang tidak stabil [2].

Sistem nonlinear direpresentasikan dalam *state space* dengan konstanta Lipschitz. Kesalahan sensor direpresentasikan sebagai vektor *state* tambahan sehingga dapat disusun sistem augmentasi dengan pendekatan sistem deskriptor. *Proportional Derivative* (PD) *observer* dirancang untuk mampu mengestimasi *state* sistem dan kesalahan sensor secara simultan [3]. Sama seperti [2], metode ini tidak dapat diaplikasikan pada sistem yang tidak stabil.

Sistem nonlinear didekati menjadi beberapa sistem linear melalui linearisasi. Diasumsikan kesalahan sensor merupakan sinyal yang memiliki dinamika tak tentu sehingga dibutuhkan pengamatan lebih terhadap derivatif dari sinyal kesalahan sensor. Derivatif sinyal kesalahan sensor ke- q dijadikan sebagai *state* tambahan yang nantinya akan disusun suatu sistem augmentasi. *Proportional Multiple Integral Observer* (PMI) dengan pendekatan *fuzzy* T-S dirancang untuk memberikan estimasi *state* sistem dan kesalahan sensor hingga derivatif ke- q secara simultan. Desain *observer fuzzy* T-S ini mampu diterapkan pada sistem yang tidak stabil. Analisa kestabilan Lyapunov juga digunakan untuk membuktikan bahwa *observer* hasil rancangan mampu memberikan nilai *error* estimasi mendekati nol saat $t \rightarrow \infty$. *Linear Matrix Inequality* (LMI) *pole region* digunakan untuk meletakkan *closed-loop poles* dari *observer* berada jauh di sebelah kiri sumbu imajiner. Akibatnya PMI *Observer* mampu mengestimasi *state* sistem dan kesalahan sensor hingga derivatif ke- q secara simultan [4].

Permasalahan *tracking* pada Sistem Pendulum Kereta menggunakan model *fuzzy* T-S dengan aturan kontroler disusun berdasarkan konsep *Parallel Distributed Compensation* telah dibahas pada [5]. Sistem kontrol *tracking* yang digunakan adalah kompensator. Kompensator merepresentasikan *state space* dari sinyal referensi yaitu sinyal sinus dengan amplitudo dan frekuensi tertentu. Hasil yang diperoleh yaitu sistem kontrol tersebut mampu memaksa posisi kereta mengikuti sinyal referensi sekaligus mempertahankan kestabilan batang pendulum pada posisi terbaliknya.

Pada tugas akhir ini, perancangan kontrol nominal akan menggunakan desain kontroler yang telah dibahas pada [5]. Perancangan kontrol *tracking* toleransi kesalahan sensor akan menggunakan PMI *Observer* seperti yang telah dibahas pada [4]. Perancangan kontroler menggunakan [5] dan *observer* [4] diaplikasikan pada Sistem Pendulum Kereta yang memiliki sifat nonlinear dan tidak stabil. Diharapkan Sistem Pendulum Kereta tetap mampu mengikuti sinyal referensi dan menjaga kestabilan pendulum pada kondisi terbaliknya walaupun terjadi kesalahan sensor.

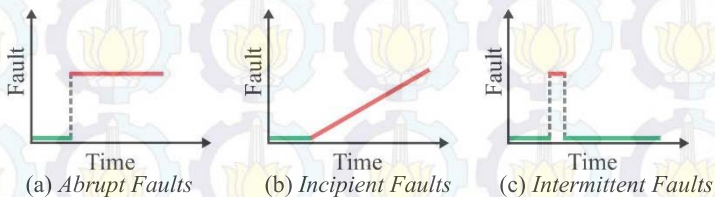
2.2 Kontrol Toleransi Kesalahan [1]

Kesalahan (*fault*) dalam sistem kontrol diartikan sebagai penyimpangan karakteristik atau parameter sistem dari kondisi nominalnya. Kesalahan pada umumnya sulit untuk diperkirakan maupun

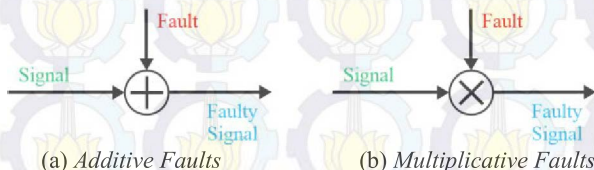
dicegah. Kesalahan yang terakumulasi dapat menyebabkan terjadinya kegagalan yang juga menjadi pemicu sistem menjadi tidak stabil serta menurunnya tingkat keamanan.

Kesalahan dapat diklasifikasikan berdasarkan waktu terjadinya yaitu *abrupt faults*, *incipient faults*, dan *intermittent faults*. *Abrupt faults* yaitu kesalahan yang memiliki dinamika lebih cepat daripada dinamika sistem. Akibat yang terjadi dari kesalahan ini biasanya adalah kerusakan *hardware*. Oleh karenanya, dibutuhkan deteksi kesalahan yang cepat untuk mengatasi kesalahan ini. *Incipient faults* adalah kesalahan yang memiliki perubahan nilai lambat terhadap waktu. Kesalahan ini biasanya timbul karena umur dari sensor, aktuator, atau sistem yang sudah tua. *Intermittent faults* adalah kesalahan yang muncul dan menghilang dengan cepat. Ilustrasi kesalahan berdasarkan waktu terjadinya dapat dilihat pada Gambar 2.1.

Pemodelan kesalahan dalam sistem kontrol dinyatakan dengan *additive faults* dan *multiplicative faults*. *Additive faults* mempengaruhi sistem dengan menambahkan sebuah sinyal kesalahan pada sinyal. Sementara *multiplicative faults* mempengaruhi sistem dengan mengalikan sebuah sinyal kesalahan ke dalam sinyal. Pemodelan kesalahan dapat dilihat pada Gambar 2.2.



Gambar 2.1 Klasifikasi Kesalahan Berdasarkan Waktu Terjadinya [1]



Gambar 2.2 Pemodelan Kesalahan [1]

Berdasarkan letak terjadinya, kesalahan dapat dibedakan menjadi tiga, yaitu kesalahan aktuator, kesalahan sistem/komponen, dan kesalahan sensor. Kesalahan aktuator didefinisikan sebagai tidak berfungsinya peralatan yang berfungsi untuk mengaktuatori/menggerakkan sistem. Contohnya adalah tidak berfungsinya aktuator elektromekanik pada mesin diesel. Kesalahan sistem/komponen didefinisikan sebagai perubahan parameter fisik sistem, seperti massa, koefisien aerodinamik, kondisi operasi, dan lain sebagainya. Kesalahan sensor didefinisikan sebagai pembacaan atau pengukuran yang salah terhadap pengukuran suatu proses.

Sistem yang sudah mengandung kesalahan sensor disebut sebagai *faulty system* yang dapat dituliskan dengan (2.2) dan (2.3), sedangkan sistem yang belum mengandung kesalahan sensor dituliskan pada (2.1):

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{y}_f = \mathbf{C}_f\mathbf{x} \quad (2.2)$$

$$\mathbf{y}_f = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}_f\mathbf{f}_s \quad (2.3)$$

dengan $\mathbf{y}_f \in \mathcal{R}^l$, $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$, dan $\mathbf{f}_s \in \mathcal{R}^k$ secara berturut-turut adalah keluaran sistem yang telah mengandung kesalahan sensor, *state* sistem, dan kesalahan sensor. Matriks \mathbf{C}_f adalah matriks output yang telah mengandung kesalahan sensor, \mathbf{C} adalah matriks output dan \mathbf{D}_f adalah matriks yang menghubungkan kesalahan sensor dengan output sistem. Matriks \mathbf{C}_f , \mathbf{C} dan \mathbf{D}_f memiliki dimensi yang bersesuaian.

Dimisalkan suatu keluaran sistem dituliskan dengan:

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Skenario kesalahan sensor berdasarkan (2.2)-(2.4) dapat dibagi menjadi beberapa kategori yang dituliskan dalam Tabel 2.1. Bentuk umum kesalahan sensor dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\mathbf{y}_f = \begin{bmatrix} y_{f1} \\ y_{f2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 x_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 x_2 + \beta_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 - 1 + \beta_1/x_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 - 1 + \beta_2/x_2 \end{bmatrix} x_2$$

$$\mathbf{y}_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\alpha_1 - 1)x_1 + \beta_1 \\ (\alpha_2 - 1)x_2 + \beta_2 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

dengan $f_{s_i} = (\alpha_i - 1)x_i + \beta_i$.

2.3 Sistem Pendulum Kereta [6]

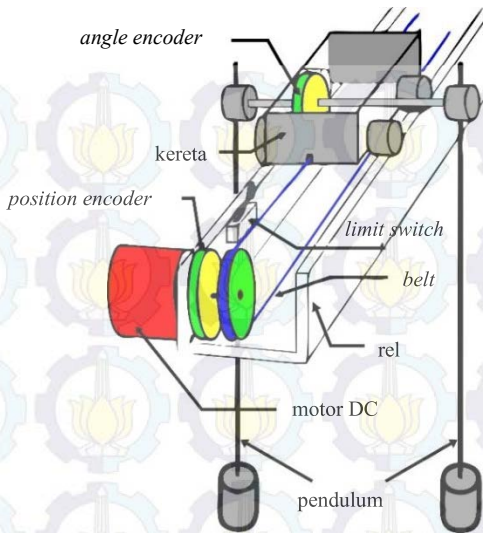
Sistem Pendulum Kereta merupakan sistem yang bersifat nonlinear dan tidak stabil. Sistem Pendulum Kereta bersifat nonlinear karena memiliki banyak titik ekuilibrium, sedangkan bersifat tidak stabil karena adanya pengaruh percepatan gravitasi saat mempertahankan batang pendulum pada posisi terbaliknnya.

Sistem Pendulum Kereta yang digunakan dalam Tugas Akhir ini adalah “Digital Pendulum Mechanical Unit 33-200” dari Feedback Instrument Ltd. Model fisik dari Sistem Pendulum Kereta tersebut terdiri atas sepasang batang pendulum yang terpasang pada sebuah kereta. Batang pendulum tersebut mampu berayun bebas 360° akibat pergerakan kereta pada lintasan rel. Sementara gerakan kereta digerakkan oleh motor dc yang dihubungkan dengan *belt*.

Lintasan rel memiliki panjang yang terbatas. Sebagai sistem pengaman maka diberikan *limit switch* pada ujung-ujung lintasan untuk mematikan motor dc secara otomatis apabila kereta bergerak melebihi posisi dari *limit switch*. Posisi kereta terhadap titik tengah lintasan kereta diukur oleh *position encoder*. Sudut batang pendulum diukur berlawanan arah jarum jam terhadap sumbu vertikal dan diukur menggunakan *angle encoder*. Komponen penyusun Sistem Pendulum Kereta tertera pada Gambar 2.3.

Tabel 2.1 Kategori Kesalahan Sensor [1]

	$\beta_i = 0$	$\beta_i \neq 0$
$\alpha_i = 1$	<i>Fault-free case</i>	<i>Bias</i>
$0 < \alpha_i < 1$	<i>Loss of sensitivity</i>	<i>Loss of sensitivity</i>
$\alpha_i = 0$	<i>Loss of measurement</i>	<i>Stuck sensor reading</i>
$\alpha_i = f(t)$	<i>Time varying parametric fault</i>	<i>Time varying parametric fault with bias</i>



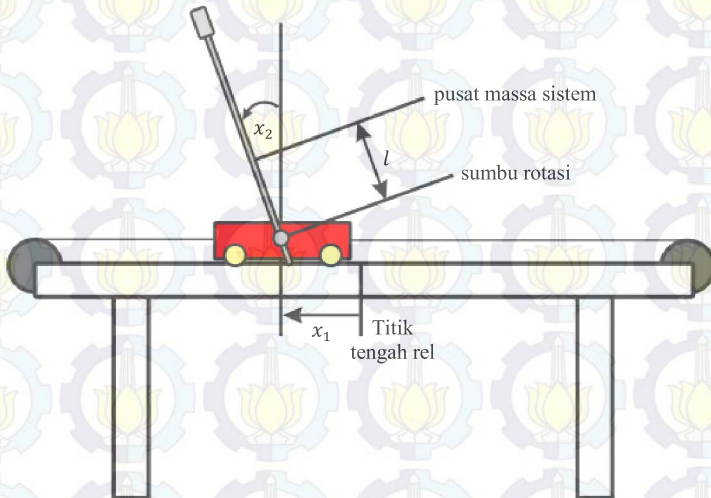
Gambar 2.3 Komponen Penyusun Sistem Pendulum Kereta [6]

Untuk menerapkan algoritma algoritma kontrol pada Sistem Pendulum Kereta digunakan perangkat lunak MATLAB dan Simulink. MATLAB berfungsi sebagai *tools* untuk menyelesaikan permasalahan matematika yang dapat digunakan untuk mencari nilai *gain* kontroler maupun *gain observer*. Sedangkan Simulink berfungsi untuk memodelkan sistem kontrol yang akan didesain. Jembatan antara perangkat lunak MATLAB dan Simulink dengan Sistem Pendulum Kereta adalah “Digital Pendulum Controller 33-201” yaitu kontroler antar muka serta board akuisisi data (DAQ) yang berfungsi sebagai I/O pada komputer.

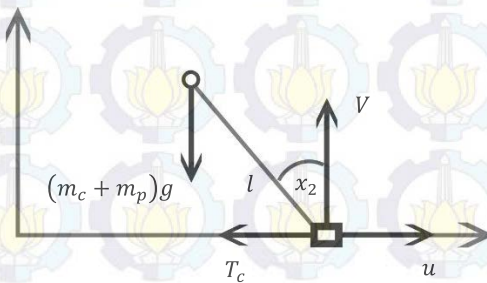
Sistem Pendulum Kereta terdiri dari empat *state*, yaitu x_1 , x_2 , x_3 dan x_4 dan satu sinyal kontrol u dengan:

- x_1 : posisi kereta diukur dari titik tengah rel (m)
- x_2 : sudut pendulum diukur terhadap garis vertikal dan titik pusat massa sistem, diukur berlawanan arah jarum jam ($x_2 = 0$ pendulum pada posisi terbaliknya) (rad)
- x_3 : kecepatan kereta (m/s)
- x_4 : kecepatan pendulum (rad/s)

Sinyal kontrol u adalah gaya dorong yang diberikan pada kereta. Gaya dorong ini memiliki hubungan paralel dengan rel. Massa kereta dinotasikan dengan m_c , massa pendulum dengan m_p , dan l adalah jarak dari sumbu putar pendulum ke pusat massa sistem, serta J adalah momen inersia Sistem Pendulum Kereta terhadap pusat massa sistem. Pemodelan Sistem Pendulum Kereta dan gaya-gaya yang berkerja pada Sistem Pendulum Kereta secara berturut-turut ditunjukkan pada Gambar 2.4 dan Gambar 2.5



Gambar 2.4 Pemodelan Sistem Pendulum Kereta



Gambar 2.5 Gaya-Gaya yang Bekerja pada Sistem Pendulum Kereta [6]

Model matematika Sistem Pendulum Kereta didapatkan melalui identifikasi fisik dengan menggunakan hukum fisika (Newton). Hukum Newton II digunakan untuk menganalisa gaya-gaya yang berkerja pada sumbu horizontal, sumbu vertikal, dan torsi yang berkerja saat pendulum berotasi. Adapun gaya-gaya tersebut seperti pada (2.6)-(2.8):

$$\sum F_x = ma_x$$

$$u - T_c = (m_c + m_p)(x_1 - l \sin x_2)'' \quad (2.6)$$

$$\sum F_y = ma_y$$

$$V - (m_c + m_p)g = (m_c + m_p)(l \cos x_2)'' \quad (2.7)$$

$$\sum \tau = I\alpha$$

$$(u - T_c)l \cos x_2 + Vl \sin x_2 - D_p = J(x_2)''$$

$$D_p = f_p x_4 \quad (2.8)$$

dengan T_c adalah gaya gesek dinamis yang besarnya bergantung pada nilai x_3 (kecepatan kereta), V adalah gaya normal sistem terhadap bidang horizontal, D_p adalah momen gesek akibat rotasi pendulum yang besarnya bergantung pada nilai x_4 (kecepatan pendulum) dan f_p adalah konstanta gesek pendulum. Parameter-parameter Sistem Pendulum Kereta secara lengkap akan dijelaskan pada Lampiran A.1. Dengan mengeliminasi V pada (2.7) dan (2.8) serta sedikit perhitungan matematis sederhana, didapatkan persamaan *state* Sistem Pendulum Kereta (untuk $t \geq 0$, $a = l^2 + J/(m_c + m_p)$ dan $\mu = (m_c + m_p)l$) yang dituliskan pada (2.9):

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \\ \dot{x}_3 &= \frac{a(u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2) + l \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{J + \mu l \sin^2 x_2} \\ \dot{x}_4 &= \frac{l \cos x_2 (u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2) + \mu g \sin x_2 - f_p x_4}{J + \mu l \sin^2 x_2} \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

2.4 Linearisasi [7]

Sistem dikatakan nonlinear apabila prinsip superposisi dan *scaling* pada sistem linear tidak bisa diterapkan. Meskipun kebanyakan sistem fisik dapat direpresentasikan dengan persamaan linear, namun dalam kenyataannya sistem tersebut tidak selalu linear. Representasi persamaan linear memiliki range kerja yang terbatas. Apabila melebihi range kerja tersebut maka sistem akan menjadi nonlinear. Misalnya saja suatu *damper* akan bersifat linear saat dioperasikan pada kecepatan rendah, namun akan bersifat nonlinear saat dioperasikan pada kecepatan tinggi.

Nonlinearitas sendiri dapat dibedakan menjadi dua, yaitu *inherent* (*natural*) dan *intentional* (*artificial*). Nonlinearitas *inherent* merupakan sifat nonlinear yang muncul akibat aktivitas gerak dari sistem, seperti gaya gesek, saturasi, dan histerisis. Sedangkan nonlinearitas *intentional* adalah sifat nonlinear yang dimunculkan secara sengaja. Prosedur untuk menemukan solusi suatu permasalahan yang mengandung sistem nonlinear secara matematis pada umumnya sangat sulit dan memakan waktu yang lama. Linearisasi merupakan metode yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan yang mengandung nonlinearitas dengan melakukan pendekatan sistem linear pada beberapa daerah kerja terbatas. Metode ini dirasa lebih mudah daripada harus menyelesaikan persoalan nonlinear secara matematis. Jadi, analisa kestabilan Lyapunov, *pole placement* dan teori-teori lainnya pada sistem linear dapat diterapkan sehingga memudahkan proses desain.

Dalam teori kontrol klasik, sistem dapat direpresentasikan ke dalam bentuk fungsi alih dan persamaan diferensial. Representasi sistem dalam bentuk persamaan diferensial dapat ditulis dengan (2.10) dan persamaan aljabar keluaran sistem dapat ditulis dengan (2.11):

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= h_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\ y_2 &= h_2(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\ &\vdots \\ y_p &= h_p(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Apabila vektor kolom $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$ disebut sebagai *state* sistem, vektor kolom $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_m]^T$ disebut sebagai sinyal kontrol dan vektor kolom $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_p]^T$ disebut sebagai keluaran sistem, maka (2.10) dapat dituliskan menjadi (2.12) dan (2.11) menjadi (2.13):

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\ f_2(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} h_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\ h_2(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\ \vdots \\ h_p(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

sehingga dapat ditulis:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \end{cases} \quad (2.14)$$

Apabila (2.14) merupakan suatu sistem linear, maka sistem tersebut dapat ditulis dalam representasi *state space*:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}_t\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases} \quad (2.15)$$

dengan $\mathbf{A} \in \mathcal{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathcal{R}^{n \times m}$, $\mathbf{C}_t \in \mathcal{R}^{p \times n}$, dan $\mathbf{D} \in \mathcal{R}^{p \times m}$.

Suatu sistem nonlinear dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.16)$$

dimana $y = f(x)$ adalah suatu kurva nonlinear. Garis singgung pada titik $(x^*, f(x^*))$ merepresentasikan pendekatan linear $f(x)$ di sekitar titik x^* sehingga linearisasi (2.16) di sekitar titik x^* dapat dituliskan

$$\delta y = f(\delta x) = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x^*} \delta x \quad (2.17)$$

dengan $\delta y = f(x) - f(x^*)$ dan $\delta x = x - x^*$. Apabila titik kerja sistem berada pada origin (0,0), maka:

$$\begin{aligned} \delta y &= f(x) - f(x^*) \\ \delta y &= f(x) - 0 \\ \delta y &= f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta x &= x - x^* \\ \delta x &= x - 0 \\ \delta x &= x \end{aligned}$$

$$y = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x^*} x \quad (2.18)$$

Apabila **f** dan **h** pada (2.14) merupakan fungsi nonlinear dari **x** dan **u** serta diberikan sebuah titik operasi dengan $\mathbf{x}^* = [x_1^*, \dots, x_n^*]^T$ merupakan titik operasi yang didapatkan saat $\mathbf{u}^* = [u_1^*, \dots, u_m^*]^T$, maka hasil linearisasi lokal (2.14) berdasarkan (2.18) dapat dituliskan dengan (2.19)-(2.22) sebagai berikut:

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_n} \end{array} \right]_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} \quad (2.19)$$

$$\mathbf{B} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_m} \end{array} \right]_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} \quad (2.20)$$

$$C = \frac{\partial h(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial h_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_n(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_n(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_n} \end{array} \right]_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} \quad (2.21)$$

$$D = \frac{\partial h(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial h_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial h_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_n(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial h_n(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_m} \end{array} \right]_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} \quad (2.22)$$

2.5 Logika *Fuzzy* [8]

Logika *fuzzy* merupakan konsep logika yang mengikuti cara berpikir manusia dalam merepresentasikan suatu nilai, permasalahan, ataupun pernyataan. Tidak seperti logika Boolean yang hanya memiliki dua nilai (0/1, Benar/Salah, atau Ya/Tidak), logika *fuzzy* memiliki nilai yang mampu merepresentasikan ketidakpastian atau persepsi yang berbeda terhadap suatu kejadian yang sama. Misalnya, menurut orang Indonesia tinggi badan 165 cm itu tergolong “tinggi”, namun menurut orang Eropa itu tergolong “sedang”, sementara menurut pemain basket NBA itu tergolong “rendah”. Tinggi badan disebut variabel premis sementara pernyataan “tinggi”, “sedang”, dan “rendah” terhadap tinggi badan manusia disebut sebagai himpunan *fuzzy*. Setiap variabel premis memiliki derajat keanggotaan terhadap setiap fungsi keanggotaan. Selanjutnya akan dibahas mengenai fungsi keanggotaan *fuzzy*, operasi himpunan *fuzzy*, dan mekanisme inferensi *fuzzy* yang digunakan dalam desain sistem kontrol *fuzzy*.

2.5.1 Fungsi Keanggotaan

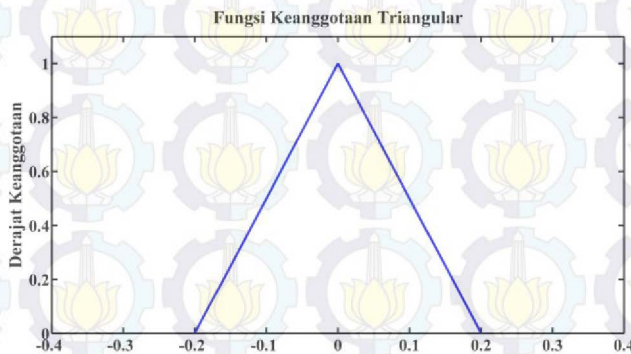
Dimisalkan x adalah suatu variabel premis, M adalah himpunan *fuzzy*, dan $\mu_m(x)$ adalah fungsi keanggotaan. Pengertian fungsi keanggotaan adalah fungsi yang memetakan variabel premis x ke dalam suatu nilai $[0,1]$ dari suatu himpunan *fuzzy* M . Nilai pemetaan variabel premis ke dalam suatu fungsi keanggotaan disebut sebagai nilai derajat keanggotaan. Macam-macam fungsi keanggotaan diantaranya adalah fungsi keanggotaan *Triangular*, *Trapezoidal*, *Gaussian*, *Generalized bell*,

Sigmoid, *Z-shape*, dan *S-shape*. Fungsi keanggotaan tersebut memiliki beberapa parameter yang digunakan untuk menentukan bentuk dari fungsi keanggotaan itu sendiri.

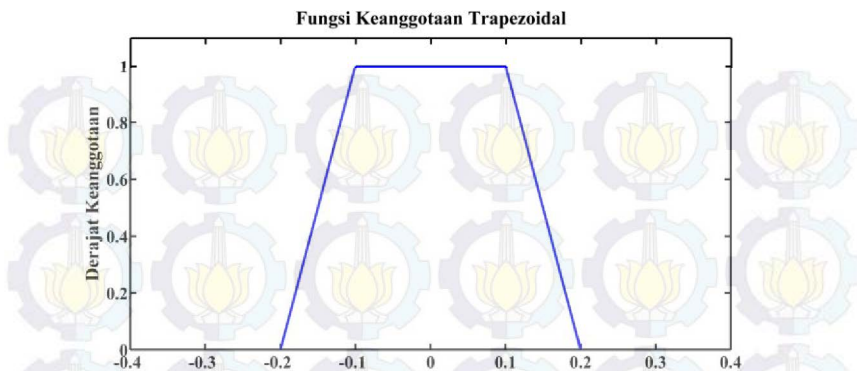
Fungsi keanggotaan *Triangular* memiliki bentuk segitiga dan terdiri dari tiga parameter yang digunakan untuk menentukan kemiringan kurva. Notasi matematika dari fungsi keanggotaan *Triangular* adalah ditunjukkan pada (2.23) dan plot fungsi keanggotaan *Triangular* ditunjukkan pada Gambar 2.6:

$$\mu_{\text{triangular}}(x; a, b, c) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b} & b \leq x \leq c \\ 0 & c \leq x \end{cases} \quad (2.23)$$

Fungsi keanggotaan *Trapezoidal* memiliki bentuk trapesium. Dalam fungsi keanggotaan *Triangular* terdapat tiga parameter yang mempengaruhi bentuk kurva, namun dalam fungsi keanggotaan *Trapezoidal* terdapat empat parameter yang mempengaruhi bentuk kurva. Keempat parameter tersebut mempengaruhi kemiringan kurva dan lebar kurva yang memiliki derajat keanggotaan bernilai 1. Notasi matematika dari fungsi keanggotaan *Trapezoidal* adalah ditunjukkan pada (2.24) dan bentuk plot fungsi keanggotaan *Trapezoidal* ditunjukkan pada Gambar 2.7:



Gambar 2.6 Fungsi Keanggotaan *Triangular* dengan $(a, b, c) = (-0.2; 0; 0.2)$



Gambar 2.7 Fungsi Keanggotaan Trapezoidal dengan $(a, b, c, d) = (-0,2; -0,1; 0,1; 0,2)$

$$\mu_{\text{trapezoidal}}(x; a, b, c, d) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c} & c \leq x \leq d \\ 0 & d \leq x \end{cases} \quad (2.24)$$

Fungsi keanggotaan berikutnya yaitu fungsi keanggotaan *Gaussian*. Bentuk fungsi keanggotaan *Gaussian* berbeda dari bentuk fungsi keanggotaan sebelumnya karena tidak tersusun atas garis lurus. Bentuk fungsi keanggotaan *Gaussian* ditentukan oleh dua parameter yaitu μ dan σ yang fungsinya secara berturut-turut sebagai titik tengah kurva dan lebar kurva. Notasi matematika dari fungsi keanggotaan *Gaussian* ditunjukkan pada (2.25):

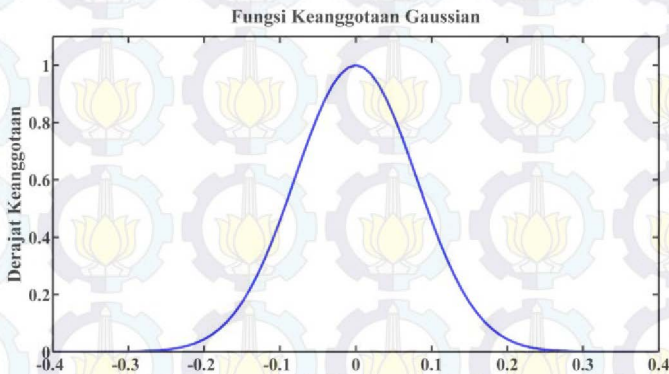
$$\mu_{\text{gaussian}}(x; \mu, \sigma) = \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.25)$$

Plot fungsi keanggotaan *Gaussian* ditunjukkan pada Gambar 2.8

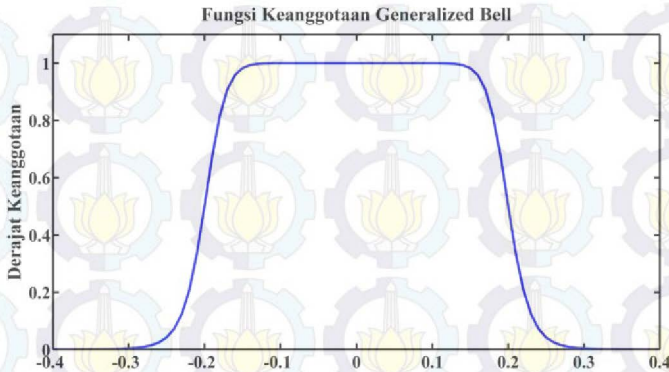
Fungsi keanggotaan *Generalized Bell* memiliki tiga parameter yang mempengaruhi letak dan bentuk fungsi. Tiga parameter tersebut diantaranya adalah (a, b, c) yang secara berturut-turut menentukan

panjang kurva yang memiliki nilai derajat keanggotaan satu, menentukan *smooth* atau tidaknya saat terjadi peralihan nilai derajat keanggotaan dari satu ke nol atau sebaliknya, dan juga menentukan titik tengah kurva. Notasi matematika dari fungsi keanggotaan *Generalized Bell* ditunjukkan pada (2.26) dan plot fungsinya ditunjukkan pada Gambar 2.9:

$$\mu_{generalized\ bell}(x; a, b, c) = \frac{1}{1 + \left| \frac{x - c}{a} \right|^{2b}} \quad (2.26)$$



Gambar 2.8 Fungsi Keanggotaan *Gaussian* dengan $(\mu, \sigma) = (0; 0,08)$



Gambar 2.9 Fungsi Keanggotaan *Generalized Bell* dengan $(a, b, c) = (0,2; 7; 0)$

2.5.2 Operasi Himpunan Fuzzy

Sama seperti operasi himpunan pada teori himpunan, operasi tersebut dapat diterapkan pada himpunan fuzzy. Operasi tersebut dilakukan dengan tujuan agar memperoleh himpunan fuzzy baru yang akan digunakan dalam mekanisme inferensi fuzzy. Dimisalkan terdapat himpunan fuzzy M_1 dan M_2 dengan fungsi keanggotaan secara berturut-turut $\mu_{m1}(x)$ dan $\mu_{m2}(x)$ serta semesta pembicaraan X . Operasi himpunan yang dapat dilakukan dari himpunan fuzzy tersebut diantaranya:

1. Komplemen (NOT)

Operasi komplemen dari himpunan fuzzy M_1 dinyatakan sebagai berikut:

$$\mu_{m1}'(x) = 1 - \mu_{m1}(x) \quad (2.27)$$

2. Intersection (AND)

Operasi *intersection* dari himpunan fuzzy M_1 dan M_2 dinyatakan dengan dua cara:

- *Minimum*

Definisi *minimum* dari *intersection* himpunan fuzzy M_1 dan M_2 adalah

$$\mu_{m1 \cap m2} = \min(\mu_{m1}(x), \mu_{m2}(x) : x \in X) \quad (2.28)$$

- *Algebraic Product*

Definisi *algebraic product* dari *intersection* himpunan fuzzy M_1 dan M_2 adalah

$$\mu_{m1 \cap m2} = (\mu_{m1}(x) \mu_{m2}(x) : x \in X) \quad (2.29)$$

3. Union (OR)

Operasi *union* dari himpunan fuzzy M_1 dan M_2 dinyatakan dengan dua cara:

- *Maximum*

Definisi *maximum* dari *union* himpunan fuzzy M_1 dan M_2 adalah

$$\mu_{m1 \cup m2} = \max(\mu_{m1}(x), \mu_{m2}(x) : x \in X) \quad (2.30)$$

- *Algebraic Sum*

Definisi *algebraic sum* dari *union* himpunan fuzzy M_1 dan M_2 adalah

$$\mu_{m1 \cup m2} = (\mu_{m1}(x) + \mu_{m2}(x) - \mu_{m1}(x)\mu_{m2}(x) : x \in X) \quad (2.31)$$

2.5.3 Mekanisme Inferensi Fuzzy

Inferensi *fuzzy* merupakan proses mengambil keputusan/konklusi dari aturan yang ada. Pengambilan aturan ini berdasarkan logika/penalaran manusia, misal:

Pengetahuan : *If* kecepatan mobil adalah sangat pelan
Then injak pedal gas lebih dalam
Fakta : Kecepatan mobil sangat pelan
Konklusi : Injak pedal gas lebih dalam

Secara umum inferensi *fuzzy* dapat dituliskan dengan (2.32):

If premis **Then** konsekuen
If x is A **Then** y is B (2.32)

dengan A dan B merupakan nilai linguistik dengan derajat keanggotaan 1 yang didefinisikan oleh himpunan *fuzzy* dari variabel linguistik x dan y . Untuk masukan *fuzzy* lebih dari satu, maka pada bagian premis diperlukan suatu operator *OR* atau *AND* untuk menghubungkan masukan *fuzzy* satu dengan masukan lainnya:

If premis **Then** konsekuen
If x_1 is A_1 *AND* x_2 is A_2 *AND* ... *AND* x_n is A_n **Then** y is B (2.33)

dengan A_1 , A_2 , A_3 , dan B adalah variabel linguistik yang didefinisikan dengan himpunan *fuzzy*. Mekanisme inferensi *fuzzy* terdiri dari lima langkah sebagai berikut (Gambar 2.10):

1. Fuzzifikasi masukan
 Mengubah masukan tegas menjadi masukan *fuzzy*. Masukan *fuzzy* didapatkan dari masukan tegas yang telah dipetakan ke dalam nilai 0 sampai dengan 1 oleh fungsi keanggotaan untuk semua himpunan *fuzzy*.

2. Aplikasi operator *fuzzy*

Penerapan operator *fuzzy* (*AND* atau *OR*) pada tiap premis dari aturan *fuzzy*.

3. Aplikasi metode implikasi

Proses mendapatkan konsekuen dengan menerapkan *minimum* atau *algebraic product* untuk operasi *AND* dan menerapkan *maximum* atau *algebraic sum* untuk operasi *OR* pada tiap aturan.

4. Agregasi semua keluaran

Penggabungan semua hasil implikasi *fuzzy* dari tiap aturan untuk menghasilkan keluaran/konklusi *fuzzy*.

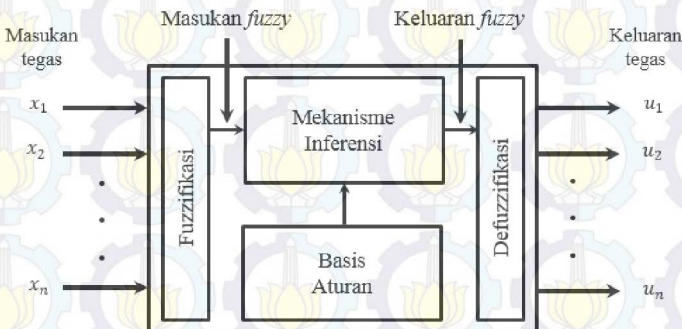
5. Defuzzifikasi

Perhitungan keluaran/konklusi *fuzzy* menjadi keluaran tegas.

Metode yang sering digunakan dalam proses defuzzifikasi keluaran *fuzzy* menjadi keluaran tegas adalah *center of gravity* dan *center (weighted) average*. Metode *center of gravity* dapat digunakan apabila fungsi keanggotaan simetris. Keluaran tegas yang dihasilkan oleh metode *center of gravity* dapat dituliskan pada (2.34)

$$y_{tegas} = \frac{\sum_{i=1}^r b_i \int \mu_i(y)}{\sum_{i=1}^r \int \mu_i(y)} \quad (2.34)$$

dengan r adalah banyaknya aturan, b_i adalah titik tengah dari fungsi keanggotaan dan $\int \mu_i(y)$ adalah luas daerah konsekuensi tiap-tiap aturan.



Gambar 2.10 Mekanisme Inferensi *Fuzzy* [8]

Metode *center (weighted) average* merupakan rata-rata berbobot dari nilai tengah fungsi keanggotaan keluaran. Sama dengan *center of gravity*, metode *center (weighted) average* dapat digunakan apabila fungsi keanggotaan simetris. Keluaran tegas yang dihasilkan oleh metode *center (weighted) average* dapat dituliskan pada (2.35)

$$y^{tegas} = \frac{\sum_{i=1}^r b_i \mu_i}{\sum_{i=1}^r \mu_i} \quad (2.35)$$

dengan r adalah banyaknya aturan, b_i adalah titik tengah dari fungsi keanggotaan dan μ_i adalah nilai bobot tiap-tiap aturan.

2.6 Model Fuzzy Takagi-Sugeno [8]

Model fuzzy Takagi-Sugeno (T-S) merupakan pemodelan fuzzy berbasis model yang digunakan untuk mengontrol *plant* (sistem) nonlinear. Sistem nonlinear direpresentasikan ke dalam beberapa model sistem linear dengan daerah kerja berbeda serta dibobotkan berdasarkan nilai derajat keanggotaannya. Oleh karena itu, analisis kestabilan sistem kontrol fuzzy dapat dilakukan. Model fuzzy T-S terdiri dari dua aturan *If-Then* yaitu aturan *plant* dan aturan kontroler yang dapat dinyatakan dengan (2.36) dan (2.40):

Aturan *plant* ke- i

If z_1 is M_{i1} and z_2 is M_{i2} ... and z_j is M_{ig}

Then $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_i \mathbf{x} + \mathbf{B}_i \mathbf{u}$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_i \mathbf{x} + \mathbf{D}_i \mathbf{u} \quad ; i = 1, 2, \dots, r \quad (2.36)$$

dengan $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathcal{R}^m$, $\mathbf{y} \in \mathcal{R}^l$, r adalah jumlah aturan fuzzy dan g adalah jumlah himpunan fuzzy dalam satu aturan, M_{ig} adalah himpunan fuzzy, dan z adalah variabel premis yang dapat berupa variabel *state* sistem. Matriks \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , dan \mathbf{D} adalah matriks konstan yang dimensinya bersesuaian.

Mekanisme inferensi fuzzy yang digunakan pada (2.36) menggunakan operator *AND (algebraic product)* dan metode defuzzifikasi yang digunakan adalah *center (weighted) average*. Bentuk keseluruhan model fuzzy T-S pada (2.36) dapat dinyatakan ke dalam (2.37):

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \sum_{i=1}^r m_i(z) [\mathbf{A}_i \mathbf{x} + \mathbf{B}_i \mathbf{u}] \\ \mathbf{y} &= \sum_{i=1}^r m_i(z) [\mathbf{C}_i \mathbf{x} + \mathbf{D}_i \mathbf{u}] \end{aligned} \right\} \quad (2.37)$$

dengan

$$m_i(z) = \frac{\mu_i(z)}{\sum_{i=1}^r \mu_i(z)}; \mu_i(z) = \prod_{j=1}^p M_{ij}(z_j) \quad (2.38)$$

Pembobot $m_i(z)$ dan derajat keanggotaan $\mu_i(z)$ memiliki sifat sebagai berikut:

$$m_i(z) \geq 0; \sum_{i=1}^r m_i(z) = 1; \mu_i(z) \geq 0; \sum_{i=1}^r \mu_i(z) > 0 \quad (2.39)$$

Dari aturan *plant* yang ada dapat disusun aturan kontroler *state feedback* dengan skema *Parallel Distributed Compensation* (PDC). Ilustrasi skema PDC dapat dilihat pada Gambar 2.11:

Aturan kontroler ke- i

If z_1 is M_{i1} and z_2 is M_{i2} ... and z_j is M_{ij}

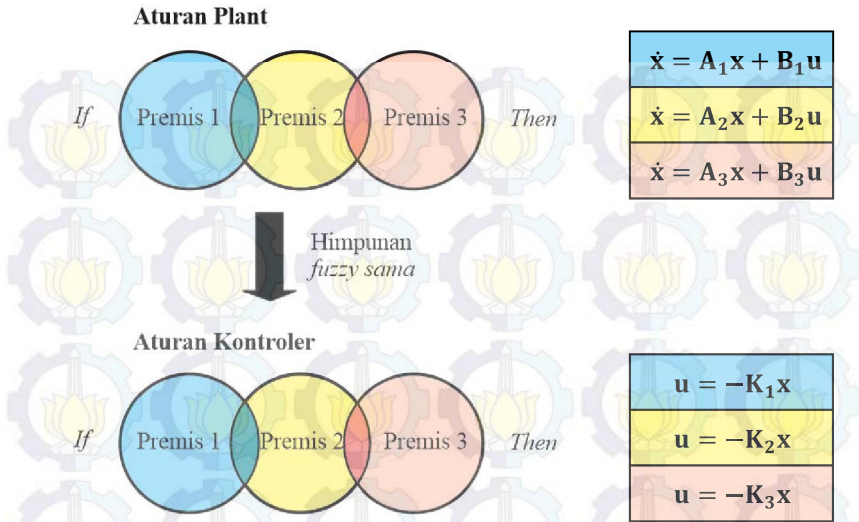
Then $\mathbf{u} = -\mathbf{K}_i \mathbf{x}; i = 1, 2, \dots, r$ (2.40)

Keluaran dari kontroler *fuzzy* secara keseluruhan dapat dituliskan dengan:

$$\mathbf{u} = - \sum_{i=1}^r m_i(z) [\mathbf{K}_i \mathbf{x}] \quad (2.41)$$

Dengan memasukkan (2.41) ke dalam (2.37), didapatkan keseluruhan sistem lup tertutup pada (2.42):

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r m_i(z) [(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{K}_j) \mathbf{x}] \\ \mathbf{y} &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r m_i(z) [(\mathbf{C}_i - \mathbf{D}_i \mathbf{K}_j) \mathbf{x}] \end{aligned} \right\} \quad (2.42)$$



Gambar 2.11 Skema *Parallel Distributed Compensation* (PDC)

2.7 Kontroler *State Feedback* dengan Kompensator [5]

Kontroler *state-feedback* dari (2.15) dinyatakan dengan

$$u = -Kx \quad (2.43)$$

Kompensator dirancang berdasarkan sinyal referensi dan sinyal gangguan. Dalam bentuk persamaan *state*, model sinyal tersebut dapat dinyatakan dengan (2.44). Jika dihubungkan dengan *plant* yang dikontrol dengan menganggap *tracking error* $e = r - y$ sebagai masukan dari model, maka akan diperoleh bentuk (2.45):

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_r &= A_r x_r \\ y_r &= C_r x_r \end{aligned} \right\} \quad (2.44)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c e_t \\ y_c &= x_c \end{aligned} \right\} \quad (2.45)$$

dengan:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_c &= \text{diag}\{\mathbf{A}_{r1} \mathbf{A}_{r2} \dots \mathbf{A}_{rs}\} \\ \mathbf{B}_c &= \text{diag}\{\mathbf{B}_{r1} \mathbf{B}_{r2} \dots \mathbf{B}_{rs}\} \end{aligned} \quad (2.46)$$

dengan \mathbf{A}_r dan \mathbf{B}_r adalah matriks polinomial karakteristik dari sinyal referensi dan s merupakan jumlah sinyal referensi dan $\mathbf{x}_c \in \mathcal{R}^c$, $\mathbf{e}_t \in \mathcal{R}^l$, $\mathbf{y}_c \in \mathcal{R}^d$ merupakan *state* kompensator, *error tracking*, dan output kompensator. Berdasarkan persamaan kompensator (2.45) dan persamaan *plant* (2.15), maka dapat disusun suatu *augmented system*

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{x}}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{B}_c \mathbf{C}_t & \mathbf{A}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_c \end{bmatrix} \mathbf{r} \quad (2.47)$$

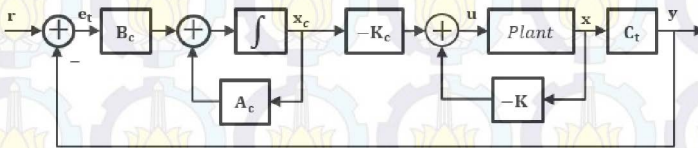
dan sinyal kontrol:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= -[\mathbf{K} \quad \mathbf{K}_c] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_c \end{bmatrix} \\ \mathbf{u} &= -\mathbf{K}\mathbf{x} - \mathbf{K}_c\mathbf{x}_c \end{aligned} \quad (2.48)$$

dengan \mathbf{K} adalah *gain state feedback* dan \mathbf{K}_c adalah *gain* kompensator. \mathbf{K} dan \mathbf{K}_c dapat dihitung menggunakan teknik LMI, optimal, atau *pole placement*. Struktur kontrol *state-feedback* dengan kompensator dapat dilihat pada Gambar 2.12

2.8 Analisa Kestabilan Lyapunov [7]

Dalam merancang suatu sistem kontrol, kestabilan sistem mutlak harus dipenuhi. Untuk sistem *linear time invariant*, berbagai kriteria stabilitas dapat diterapkan. Kriteria stabilitas tersebut diantaranya adalah kriteria stabilitas Routh. Namun untuk sistem nonlinear dan/atau *linear time varying*, kriteria stabilitas tersebut tidak dapat diaplikasikan.



Gambar 2.12 Kontrol *State Feedback Fuzzy T-S* dengan Kompensator

Pada tahun 1892, A. M. Lyapunov mengajukan dua metode untuk menentukan kestabilan sistem yang dinyatakan dalam persamaan diferensial. Metode pertama yang diajukan cukup sulit karena harus mencari solusi dari persamaan diferensial. Namun, metode kedua yang diajukan lebih mudah karena dalam menentukan kestabilan sistem tidak perlu menyelesaikan persamaan diferensial. Representasi sistem yang diajukan Lyapunov yaitu

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (2.49)$$

dengan $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$ adalah *state* sistem dan $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{R}^n$ adalah fungsi dari \mathbf{x} dan t . Sistem pada (2.49) memiliki *state* ekulibrium \mathbf{x}_e untuk semua t dengan

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_e, t) = \mathbf{0} \quad (2.50)$$

Pada metode kedua Lyapunov, sistem dikatakan stabil asimtotik pada *state* ekulibriumnya jika energi yang tersimpan pada sistem berangsur-angsur berkurang seiring bertambahnya waktu hingga mencapai nilai minimum pada *state* ekulibriumnya. Oleh karena itu, Lyapunov merumuskan suatu fungsi buatan yang nantinya dapat digunakan untuk menganalisa kestabilan.

Fungsi Lyapunov bergantung pada x_1, x_2, \dots, x_n , dan t . Fungsi tersebut dapat dituliskan sebagai $V(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ atau $V(\mathbf{x}, t)$. Apabila fungsi Lyapunov tidak mengandung t secara eksplisit, maka fungsi tersebut dapat disederhanakan menjadi $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ atau $V(\mathbf{x})$. Pada metode kedua Lyapunov tanda dari $V(\mathbf{x}, t)$ dan $\dot{V}(\mathbf{x}, t) = dV(\mathbf{x}, t)/dt$ memberikan informasi mengenai kestabilan, kestabilan asimtotik, dan ketidakstabilan dari sebuah *state* ekulibrium tanpa mengharuskan menyelesaikan solusi persamaan diferensial dari (2.49).

Suatu sistem dapat dinyatakan dengan (2.49) dengan

$$\mathbf{f}(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0} \quad , \text{ untuk semua nilai } t \quad (2.51)$$

Jika terdapat fungsi skalar $V(\mathbf{x}, t)$ yang mempunyai turunan parsial pertama yang kontinu dan memenuhi kondisi:

1. $V(\mathbf{x}, t)$ adalah definit positif
2. $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$ adalah definit negatif

maka *state* ekuilibrium pada *origin* adalah stabil asimtotik.

Jika terdapat sistem linear *time-invariant* dengan (2.52)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (2.52)$$

dengan $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$ adalah *state* sistem, $\mathbf{A} \in \mathcal{R}^{n \times n}$ matriks konstan nonsingular, dan *state* ekuilibrium pada origin ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$). Kestabilan dari *state* ekuilibrium dapat diketahui dengan menggunakan metode kedua Lyapunov. Fungsi kandidat Lyapunov untuk (2.52) dipilih sebagai berikut

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \quad (2.53)$$

dengan \mathbf{P} adalah matriks simetris. Turunan pertama fungsi kandidat Lyapunov (2.53) adalah:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{V}(\mathbf{x}) &= (\mathbf{A}\mathbf{x})^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} (\mathbf{A}\mathbf{x}) \\ \dot{V}(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x} \\ \dot{V}(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x} \end{aligned} \quad (2.54)$$

Sistem (2.52) akan stabil asimtotik pada *state* ekuilibriumnya apabila memenuhi syarat bahwa kandidat fungsi Lyapunov adalah definit positif dan derivatif dari kandidat fungsi Lyapunov adalah definit negatif. Syarat tersebut dapat dituliskan sebagai berikut:

1. $V(\mathbf{x}, t)$ adalah definit positif
 $\mathbf{P} > 0$ dan simetris
2. $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$ adalah definit negatif
 $\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} < 0$

2.9 Linear Matrix Inequality (LMI) [9]

Analisa kestabilan Lyapunov merupakan permasalahan pertama dari LMI. Sistem tersebut stabil apabila terdapat matriks $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$ yang memenuhi (2.55):

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} < 0 \quad (2.55)$$

Penyelesaian solusi matriks \mathbf{P} untuk orde yang kecil ($n \leq 2$) masih bisa dilakukan dengan mudah secara analitis. Namun untuk orde yang besar penyelesaian solusi secara analitis sangat sulit dilakukan. Penyelesaian tersebut dapat diselesaikan secara numerik dengan optimisasi konveks atau yang lebih dikenal dengan *Linear Matrix Inequality* (LMI). *Linear Matrix Inequality* memiliki bentuk

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_0 + \sum_{i=1}^m x_i \mathbf{F}_i > 0 \quad (2.56)$$

dengan $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^m$ adalah variabel dan matriks simetris $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^T \in \mathcal{R}^m$, $i = 0, \dots, m$. Persamaan (2.56) merupakan fungsi kendala dari \mathbf{x} dengan tujuan adalah mendapatkan matriks $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ simetris positif definit.

Beberapa LMI $\mathbf{F}^{(1)}(\mathbf{x}) > 0, \dots, \mathbf{F}^{(p)}(\mathbf{x}) > 0$ dapat dituliskan dalam satu LMI dengan $\text{diag}(\mathbf{F}^{(1)}(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{F}^{(p)}(\mathbf{x})) > 0$. Ketika matriks \mathbf{F}_i adalah matriks diagonal, LMI $\mathbf{F}(\mathbf{x}) > 0$ menjadi kumpulan suatu pertidaksamaan linear. Untuk kasus pertidaksamaan nonlinear (2.57) (*convex*), pertidaksamaan tersebut dapat diubah ke dalam bentuk LMI (2.58) menggunakan *Schur Complement*:

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}) > 0, \quad \mathbf{Q}(\mathbf{x}) - \mathbf{S}(\mathbf{x})\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{S}(\mathbf{x})^T > 0 \quad (2.57)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}(\mathbf{x}) & \mathbf{S}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{S}(\mathbf{x})^T & \mathbf{R}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} > 0 \quad (2.58)$$

dengan $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}(\mathbf{x})^T$, $\mathbf{R}(\mathbf{x}) = \mathbf{R}(\mathbf{x})^T$. Pada (2.55) matriks $\mathbf{A} \in \mathcal{R}^{n \times n}$ adalah matriks yang diketahui dan matriks $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T \in \mathcal{R}^{n \times n}$ adalah matriks variabel. Sesuai dengan (2.56) dan syarat kestabilan Liapunov (2.55):

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{(1)} &= -\mathbf{A}^T \mathbf{P} - \mathbf{P} \mathbf{A} > 0 \\ \mathbf{F}^{(2)} &= \mathbf{P} > 0 \end{aligned}$$

Karena terdapat dua LMI, maka kedua LMI tersebut dapat dituliskan dalam satu LMI:

$$\begin{aligned} \text{diag} \left(\mathbf{F}^{(1)}(\mathbf{x}) > 0, \dots, \mathbf{F}^{(p)}(\mathbf{x}) \right) &> \mathbf{0} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{F}^{(1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}^{(2)} \end{bmatrix} &> \mathbf{0} \\ \begin{bmatrix} -\mathbf{A}^T \mathbf{P} - \mathbf{P} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P} \end{bmatrix} &> \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.59)$$

2.10 Proportional Multiple Integral Observer (PMIO) [4]

Propotional Integral (PI) observer merupakan perluasan dari *observer* Luenberger. Munculnya integral pada *error* estimasi membuat estimasi lebih efektif terhadap *perturbations* dan *input disturbances*. *PI observer* dapat diperluas untuk estimasi *unknown input fault* yang tidak konstan dengan menambahkan *multiple integral*. Perluasan *observer* PI tersebut dapat disebut sebagai *Proportional Multiple Integral Observer* (PMIO). Oleh karenanya, berbagai *unknown input* dapat diestimasi.

Suatu sistem linear dengan persamaan *state* seperti pada (2.60):

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{x}_f &= \mathbf{x} + \mathbf{D}_f \mathbf{f}_s \end{aligned} \right\} \quad (2.60)$$

dengan $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathcal{R}^m$, $\mathbf{f}_s \in \mathcal{R}^k$, $\mathbf{x}_f \in \mathcal{R}^n$ secara berturut-turut adalah *state* sistem, sinyal kontrol, keluaran sistem, kesalahan sensor, dan *state* sistem *faulty*. Matriks \mathbf{A} , \mathbf{B} , dan \mathbf{D}_f adalah matriks konstan dengan dimensi yang bersesuaian. Misal \mathbf{f}_s^q adalah derivatif kesalahan sensor ke- q , maka dapat dibuat suatu *state* tambahan (2.61) dan sistem augmentasi (2.62):

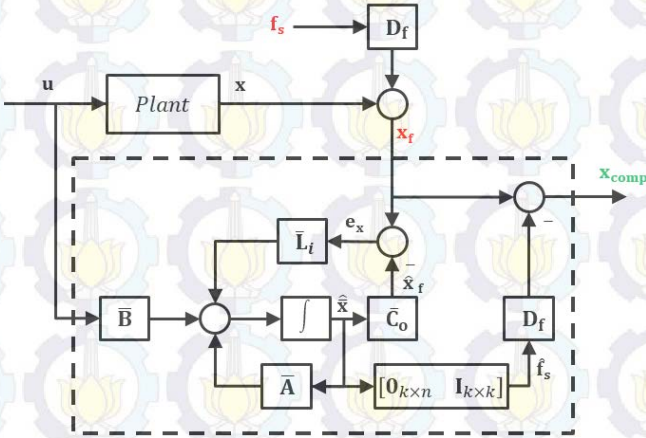
$$\boldsymbol{\varphi}_i = \mathbf{f}_s^{q-i} (i = 1, 2, \dots, q); \boldsymbol{\varphi}_1 = \mathbf{f}_s^q; \boldsymbol{\varphi}_2 = \boldsymbol{\varphi}_1; \dots; \boldsymbol{\varphi}_q = \boldsymbol{\varphi}_{q-1} \quad (2.61)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{x}}} &= \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u} + \mathbf{G}\mathbf{f}_s^q \\ \mathbf{x}_f &= \bar{\mathbf{C}}_0 \bar{\mathbf{x}} \end{aligned} \right\} \quad (2.62)$$

dengan:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{R}^{\bar{n}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\varphi}_1 \\ \boldsymbol{\varphi}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varphi}_q \end{bmatrix} & \bar{\mathbf{A}} \in \mathcal{R}^{\bar{n} \times \bar{n}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0}_{n \times k} & \cdots & \mathbf{0}_{n \times k} & \mathbf{0}_{n \times k} \\ \mathbf{0}_{k \times n} & \mathbf{0}_{k \times k} & \cdots & \mathbf{0}_{k \times k} & \mathbf{0}_{k \times k} \\ \mathbf{0}_{k \times n} & \mathbf{I}_{k \times k} & \cdots & \mathbf{0}_{k \times k} & \mathbf{0}_{k \times k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0}_{k \times n} & \mathbf{0}_{k \times k} & \cdots & \mathbf{I}_{k \times k} & \mathbf{0}_{k \times k} \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbf{B}} \in \mathcal{R}^{\bar{n} \times m} &= \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0}_{k \times m} \\ \mathbf{0}_{k \times m} \\ \vdots \\ \mathbf{0}_{k \times m} \end{bmatrix} & \mathbf{G} \in \mathcal{R}^{\bar{n} \times k} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times k} \\ \mathbf{I}_k \\ \mathbf{0}_{k \times k} \\ \vdots \\ \mathbf{0}_{k \times k} \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbf{C}}_o \in \mathcal{R}^{l \times \bar{n}} &= [\mathbf{I}_n \quad \mathbf{0}_{n \times k} \quad \mathbf{0}_{n \times k} \quad \cdots \quad \mathbf{D}_f] \\ \bar{n} &= n + kq \end{aligned} \quad (2.63)$$

PMI *Observer* mampu mengestimasi *state* sistem dan kesalahan sensor secara simultan dituliskan pada (2.64) dan diilustrasikan pada Gambar 2.13:



Observer Proportional Multiple Integral

Gambar 2.13 Struktur *Proportional Multiple Integral Observer* (PMIO)

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \{\bar{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u} + \bar{\mathbf{L}}(\mathbf{x}_f - \bar{\mathbf{C}}_0\hat{\mathbf{x}})\} \quad (2.64)$$

dengan $\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{R}^{\bar{n}}$ dan $\bar{\mathbf{L}} \in \mathcal{R}^{\bar{n} \times l}$ secara berturut-turut adalah estimasi *state* $\bar{\mathbf{x}}$ dan *gain observer* hasil desain. PMI *Observer* pada (2.64) eksis apabila memenuhi syarat *observable* pada (2.65) dan (2.66):

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_n & \mathbf{D}_f \end{bmatrix} = n + k \quad (2.65)$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} \\ \mathbf{I}_n \end{bmatrix} = n, \quad \forall s \in \mathbb{C} \quad (2.66)$$

2.11 Performa H_∞ [10]

Tujuan utama dalam perancangan sistem kontrol yaitu sistem kontrol hasil desain dapat stabil dengan performa yang diinginkan. Namun kenyataannya, adanya gangguan dari luar dapat mengganggu kestabilan sistem. Oleh karena itu, sistem kontrol yang dirancang harus *robust* (kokoh) terhadap gangguan dari luar. Sistem dikatakan memiliki performa *robust* apabila sistem tersebut mampu menjaga kestabilannya meskipun terdapat gangguan dari luar.

Metode kontrol *robust* yang sering digunakan adalah kontrol H_∞ . Pada H_∞ , kontroler didesain untuk meminimalkan pengaruh terburuk dari gangguan yang masuk. Pengaruh terburuk gangguan terhadap keluaran performa dapat diketahui dengan menghitung ∞ -norm dari fungsi alih sistem yang didefinisikan sebagai

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{\omega} |G(j\omega)| \quad (2.67)$$

dengan $G(s)$ adalah fungsi alih keluaran terhadap gangguan dan ∞ -norm dari fungsi alih $G(s)$ adalah nilai maksimal dari magnitudo $G(j\omega)$.

Konfigurasi sistem kontrol *robust* dapat dilihat pada Gambar 2.14. Dari Gambar tersebut \mathbf{P} dan \mathbf{K} menyatakan *plant* dan kontroler. Masukan dari *plant* adalah \mathbf{u} dan \mathbf{w} yang masing-masing menyatakan sinyal kontrol dan gangguan. Keluaran dari *plant* adalah \mathbf{y} dan \mathbf{z} keluaran terukur untuk kontroler dan keluaran performa.

Dalam Tugas Akhir ini, *observer* dirancang agar memiliki performa H_∞ . Nilai *gain* PMI *Observer* dihitung sedemikian hingga pengaruh terburuk dari \mathbf{f}_s^q terhadap keluaran performa \mathbf{z} kurang dari tingkat

pelemahan (γ_{pmi}) yang diinginkan. Performa H_∞ yang berkaitan dengan *error* estimasi *state* augmentasi PMI *Observer* \mathbf{e}_x adalah

$$\frac{\|\mathbf{z}\|_2}{\|\mathbf{w}\|_2} = \frac{\sqrt{\int_0^{t_f} \mathbf{e}_x^T \mathbf{C}_p^T \mathbf{C}_p \mathbf{e}_x dt}}{\sqrt{\int_0^{t_f} \mathbf{w}^T \mathbf{w} dt}} \leq \gamma_{pmi} \quad (2.68)$$

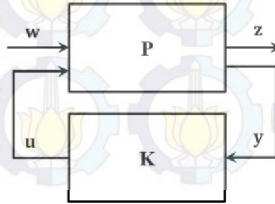
dengan menguadratkan kedua ruas didapat

$$\frac{\int_0^{t_f} \mathbf{e}_x^T \mathbf{C}_p^T \mathbf{C}_p \mathbf{e}_x dt}{\int_0^{t_f} \mathbf{w}^T \mathbf{w} dt} \leq \gamma_{pmi}^2 \quad (2.69)$$

$$\int_0^{t_f} \mathbf{e}_x^T \mathbf{C}_p^T \mathbf{C}_p \mathbf{e}_x dt = \gamma_{pmi}^2 \int_0^{t_f} \mathbf{w}^T \mathbf{w} dt \quad (2.70)$$

dengan $\mathbf{e}_x = \bar{\mathbf{x}} - \hat{\bar{\mathbf{x}}}$, $\bar{\mathbf{x}}$ adalah *state* augmentasi pada PMI *Observer* dan $\hat{\bar{\mathbf{x}}}$ adalah estimasi dari $\bar{\mathbf{x}}$. \mathbf{C}_p adalah matriks pembobot, $\mathbf{w} = \mathbf{f}_s^q$ adalah derivatif ke- q dari kesalahan sensor, t_f adalah waktu akhir, dan γ_{pmi} adalah level pelemahan. Dari (2.68)-(2.70). terlihat bahwa pengaruh \mathbf{f}_s^q pada *error* estimasi *state* augmentasi PMI *Observer* harus dilemahkan kurang dari atau sama dengan level pelemahan γ_{pmi}^2 . Adapun ∞ -norm dari fungsi alih sistem (2.68) dapat dihitung sesuai dengan (2.71):

$$\left\| \frac{Z(s)}{W(s)} \right\|_\infty = \sup_\omega \left| \frac{Z(j\omega)}{W(j\omega)} \right| = \sup_{\|\mathbf{w}\|_2 \neq 0} \frac{\|\mathbf{z}\|_2}{\|\mathbf{w}\|_2} \quad (2.71)$$



Gambar 2.14 Konfigurasi Sistem Kontrol *Robust* [10]

2.12 Pole Placement pada LMI Region [11]

Kestabilan adalah persyaratan minimum dalam sistem kontrol. Namun, sebuah kontroler juga harus mampu memberikan respons yang cepat dan *overshoot* seminimal mungkin. Hal tersebut dapat dicapai dengan menempatkan pole sistem lup tertutup sistem pada daerah D . Daerah D merupakan daerah desain yang diinginkan dan berada pada bidang kompleks sebagaimana tertera pada Gambar 2.15.

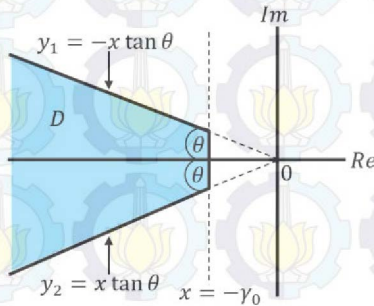
Settling time dan *overshoot* respons sistem bergantung pada pemilihan *damping ratio* ($\cos \theta$). Sementara kecepatan respons sistem bergantung pada γ_0 . Subset daerah D pada bidang kompleks disebut sebuah LMI region jika terdapat matriks simetris \mathbf{L} dan \mathbf{M} sehingga

$$D = \{z \in \mathbb{C} : f_d(z)\} < 0 \quad (2.72)$$

dengan $f_d(z) = \mathbf{L} + z\mathbf{M} + \bar{z}\mathbf{M}^T$ dan disebut sebagai fungsi karakteristik dari D . Berikut ini adalah beberapa contoh LMI region:

1. *Half plane* dengan LMI region berada di sebelah kiri $Re(z) = -\gamma_0$ (Gambar 2.16)

$$f_d(z) = z + \bar{z} + 2\gamma_0 < 0 \quad (2.73)$$



Gambar 2.15 Pole Placement pada LMI

2. Kerucut dengan LMI region berada di dalam kerucut dan sudut antara sisi miring kerucut dengan sumbu $Re(z)$ adalah θ (Gambar 2.17)

$$f_d(z) = \begin{bmatrix} \sin \theta(z + \bar{z}) & \cos \theta(z - \bar{z}) \\ (\cos \theta(z - \bar{z}))^T & \sin \theta(z + \bar{z}) \end{bmatrix} < 0 \quad (2.74)$$

3. Lingkaran yang berpusat pada $(-q, 0)$ dengan jari-jari r (Gambar 2.18)

$$f_d(z) = \begin{bmatrix} -r & q + z \\ q + \bar{z} & -r \end{bmatrix} < 0 \quad (2.75)$$

Pole dari *closed loop system* berada di daerah D seperti pada Gambar 2.16–Gambar 2.18 dapat diperoleh dengan mencari *gain* kontroler \mathbf{K} dan matriks kestabilan $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$ yang memenuhi LMI berikut ini:

1. *Half plane*

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{P} > 0 \\ \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^T + (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{P} + 2\gamma_0\mathbf{P} < 0 \end{array} \right\} \quad (2.76)$$

2. Kerucut

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{P} > 0 \\ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^T & \alpha \end{bmatrix} < 0 \end{array} \right\} \quad (2.77)$$

dengan

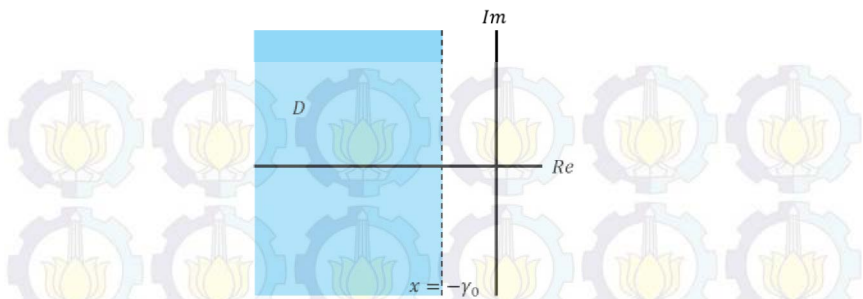
$$\begin{aligned} \alpha &= \sin \theta ((\mathbf{A} - \mathbf{BK})^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{BK})) \\ \beta &= \cos \theta (-(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} + \mathbf{BK})) \end{aligned}$$

3. Lingkaran

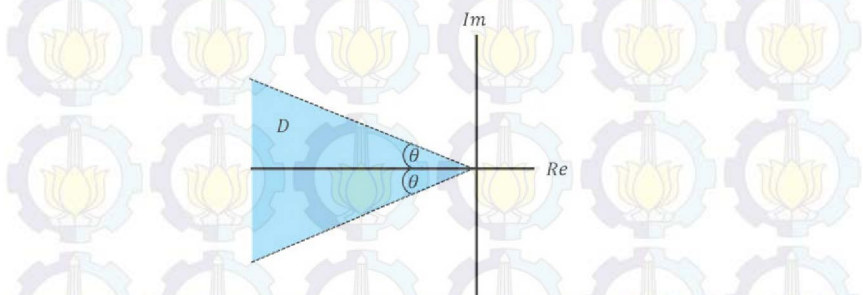
$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{P} > 0 \\ \begin{bmatrix} -r\mathbf{P} & \rho \\ \rho^T & -r\mathbf{P} \end{bmatrix} < 0 \end{array} \right\} \quad (2.78)$$

dengan

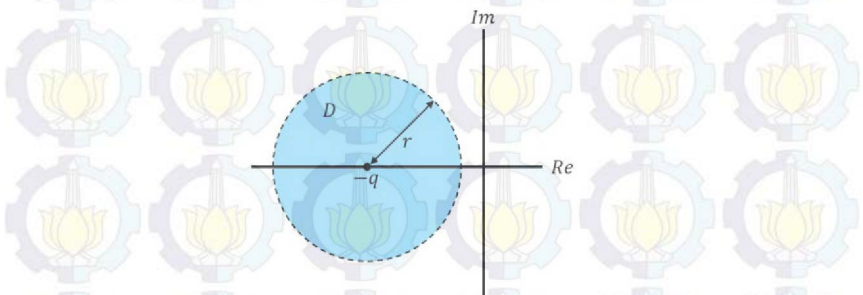
$$\rho = q\mathbf{P} + (\mathbf{A} - \mathbf{BK})^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$$



Gambar 2.16 *Half Plane* dengan LMI Region di Sebelah Kiri $x = -\gamma_0$



Gambar 2.17 Kerucut dengan LMI Region Berada di Dalam Kerucut



Gambar 2.18 Lingkaran dengan LMI Region Berada di Dalam Lingkaran

Pertidaksamaan (2.76)-(2.78) merupakan permasalahan *Bilinear Matrix Inequalities* (BMI) karena mengandung perkalian langsung antara dua matriks variabel yaitu $\mathbf{K}\mathbf{P}$ dan $\mathbf{P}\mathbf{K}^T$. Agar permasalahan tersebut

dapat diselesaikan dengan LMI, maka perkalian langsung antara dua matriks variabel harus dihindari yaitu dengan cara menambahkan matriks bantu $\mathbf{Y} = \mathbf{K}\mathbf{P}$. Dengan mensubstitusi $\mathbf{Y} = \mathbf{K}\mathbf{P}$ ke dalam (2.76)-(2.78) didapatkan:

1. *Half plane*

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{P} > 0 \\ \mathbf{P}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\mathbf{P} - \mathbf{B}\mathbf{Y} - \mathbf{Y}^T\mathbf{B}^T + 2\gamma_0\mathbf{P} < 0 \end{array} \right\} \quad (2.79)$$

2. Kerucut

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{P} > 0 \\ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^T & \alpha \end{bmatrix} < 0 \end{array} \right\} \quad (2.80)$$

dengan

$$\begin{aligned} \alpha &= \sin \theta (\mathbf{P}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\mathbf{P} - \mathbf{B}\mathbf{Y} - \mathbf{Y}^T\mathbf{B}^T) \\ \beta &= \cos \theta (-\mathbf{P}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\mathbf{P} - \mathbf{B}\mathbf{Y} + \mathbf{Y}^T\mathbf{B}^T) \end{aligned}$$

3. Lingkaran

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{P} > 0 \\ \begin{bmatrix} -r\mathbf{P} & \rho \\ \rho^T & -r\mathbf{P} \end{bmatrix} < 0 \end{array} \right\} \quad (2.81)$$

dengan

$$\rho = q\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\mathbf{P} - \mathbf{B}\mathbf{Y} - \mathbf{Y}^T\mathbf{B}^T$$

Nilai *gain* \mathbf{K} dapat dicari dengan $\mathbf{K} = \mathbf{Y}\mathbf{P}^{-1}$

2.13 Batasan untuk Optimasi *Gain* [11]

Pole placement pada LMI *region* terkadang mengakibatkan *gain* kontroler bernilai sangat besar. Hal ini dapat mengakibatkan beban komputasi menjadi bertambah apabila memakai kontroler digital dan sulit untuk mencari kontroler dengan spesifikasi *gain* yang besar apabila menggunakan kontroler analog. Akibat lainnya yaitu sinyal kontrol yang

dihasilkan menjadi sangat besar pula, sehingga implementasi pada *plant* nyata menjadi sulit untuk dilakukan.

Oleh karenanya, diperlukan pembatasan *gain* agar nilai *gain* yang dihasilkan akibat *pole placement* pada LMI *region* berada di bawah suatu batas nilai. Untuk membatasi *gain*, maka kondisi berikut harus dipenuhi:

$$\mathbf{Y}^T \mathbf{Y} < k_y \mathbf{I} \quad (2.82)$$

$$\mathbf{P}^{-1} < k_p \mathbf{I} \quad (2.83)$$

Dengan k_y dan k_p adalah bilangan positif. Dengan menerapkan *Schur Complement* pada (2.82) dan (2.83) didapatkan:

$$\begin{bmatrix} -k_y \mathbf{I} & \mathbf{Y}^T \\ \mathbf{Y} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.84)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & k_p \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \quad (2.85)$$

BAB 3

PERANCANGAN SISTEM KONTROL

Bab ini akan membahas mengenai perancangan kontrol *tracking* toleransi kesalahan sensor pada Sistem Pendulum Kereta. Sistem Pendulum Kereta dilinearisasi pada dua titik kerja, kemudian kontrol linear dan PMI *Observer* dirancang untuk masing-masing model linear berdasarkan konsep PDC. Kontrol linear yang digunakan berupa *state-feedback* dengan kompensator. *Gain* kontroler diperoleh dengan teknik *pole placement* pada *LMI region*. *Gain* PMI *Observer* diperoleh berdasarkan analisa kestabilan Liapunov, performa H_∞ dan *pole-placement* pada *LMI region*. Nilai *gain* kontroler dan PMI *Observer* dihitung menggunakan *LMI toolbox* yang ada pada Matlab. Terakhir, keseluruhan sistem disusun pada diagram Simulink untuk simulasi dan implemmentasi.

3.1 Linearisasi Sistem Pendulum Kereta

Persamaan (2.9) merupakan model matematika dari Sistem Pendulum Kereta. Persamaan tersebut menunjukkan bahwa Sistem Pendulum Kereta merupakan sistem nonlinear. Linearisasi pada beberapa titik kerja diperlukan untuk merepresentasikan sistem tersebut dalam model linear agar teori kontrol linear dapat diterapkan. Titik kerja tersebut berada di sekitar titik ekuilibrium. Titik ekuilibrium merupakan titik di mana semua laju perubahan *state* sistem bernilai nol.

Model matematika Sistem Pendulum Kereta dapat dituliskan dengan:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$

$$\begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ f_3(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ f_4(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \frac{a(u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2) + l \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{J + \mu l \sin^2 x_2} \\ \frac{l \cos x_2 (u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2) + \mu g \sin x_2 - f_p x_4}{J + \mu l \sin^2 x_2} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Titik ekuilibrium Sistem Pendulum Kereta dapat diperoleh dengan menyelesaikan (3.2):

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e, t) = \mathbf{0} \quad (3.2)$$

Dengan memasukkan (2.9) ke dalam (3.2), didapatkan titik ekuilibrium sistem

$$\mathbf{x}_e = [k \quad n\pi \quad 0 \quad 0]; \quad u_e = 0 \quad (3.3)$$

dengan k adalah elemen bilangan real dan n adalah elemen bilangan bulat.

Linearisasi lokal Sistem Pendulum Kereta dilakukan di sekitar *state* ekuilibriumnya.. Model linear Sistem Pendulum Kereta didapatkan dengan linearisasi di sekitar $\mathbf{x}^* = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$ dan $u^* = 0$, $\mathbf{x}^* = [0 \quad \pm 0,25 \quad 0 \quad 0]$ dan $u^* = 0$. Penurunan rumus matriks Jacobi \mathbf{A} dan \mathbf{B} dibahas lebih lanjut pada Lampiran A.2:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1 \mathbf{u}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_2 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_2 \mathbf{u}(t) \end{aligned}$$

dengan:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0,2525 & 0 & -0,0001 \\ 0 & 15,0376 & 0 & -0,0079 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,8272 \\ 1,2370 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0,2205 & 0 & -0,0001 \\ 0 & 14,5014 & 0 & -0,0079 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,8259 \\ 1,1967 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Matriks keluaran untuk ketiga model linear Sistem Pendulum Kereta adalah sama:

$$\mathbf{C}_{t1} = \mathbf{C}_{t2} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (3.6)$$

$$\mathbf{D}_1 = \mathbf{D}_2 = 0 \quad (3.7)$$

3.2 Pemodelan *Fuzzy Takagi-Sugeno*

Model *fuzzy* T-S dibangun berdasarkan linearisasi sistem nonlinear pada beberapa titik kerja. Titik kerja yang dipilih adalah titik kerja yang berada di sekitar titik ekuilibrium dari sistem. Karena posisi pendulum ingin dijaga pada posisi terbaliknya dengan posisi kereta dipaksa mengikuti sinyal referensi maka dipilih titik ekuilibrium adalah $x_2 = 0$ rad, sementara titik kerja yang dipilih adalah $x_2 = 0$ rad dan $x_2 = \pm 0,25$ rad. Berdasarkan titik kerja yang dipilih dapat disusun dua aturan *plant* (*If* premis *Then* konsekuen) dengan premis adalah x_2 :

Aturan *plant* ke-1

$$\begin{aligned} \text{If } & x_2(t) \text{ is } M_1 \text{ (sekitar } 0 \text{ rad)} \\ \text{Then } & \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1 \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_{t1} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_1 \mathbf{u}(t) \end{aligned} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Aturan *plant* ke-2

$$\begin{aligned} \text{If } & x_2(t) \text{ is } M_2 \text{ (sekitar } \pm 0,25 \text{ rad)} \\ \text{Then } & \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_2 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_2 \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_{t2} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_2 \mathbf{u}(t) \end{aligned} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Aturan kontroler *fuzzy* berdasarkan skema PDC dan Subbab 2.7 dapat dituliskan sebagai berikut:

Aturan kontroler ke-1

$$\begin{aligned} \text{If } & x_2(t) \text{ is } M_1 \text{ (sekitar } 0 \text{ rad)} \\ \text{Then } & \mathbf{u}(t) = -[\mathbf{K}_1 \quad \mathbf{K}_{c1}] \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_c(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Aturan kontroler ke-2

$$\begin{aligned} \text{If } & x_2(t) \text{ is } M_2 \text{ (sekitar } \pm 0,25 \text{ rad)} \\ \text{Then } & \mathbf{u}(t) = -[\mathbf{K}_2 \quad \mathbf{K}_{c2}] \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_c(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Sedangkan aturan *observer fuzzy* berdasarkan skema PDC dan Subbab 2.10 dapat dituliskan dengan:

Aturan *observer* ke-1

If $x_2(t)$ is M_1 (sekitar 0 rad)

Then $\hat{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{A}}_1 \hat{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{B}}_1 \mathbf{u} + \bar{\mathbf{L}}_1 (\mathbf{x}_f - \bar{\mathbf{C}}_0 \bar{\mathbf{x}})$ (3.12)

Aturan *observer* ke-2

If $x_2(t)$ is M_2 (sekitar $\pm 0,25$ rad)

Then $\hat{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{A}}_2 \hat{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{B}}_2 \mathbf{u} + \bar{\mathbf{L}}_2 (\mathbf{x}_f - \bar{\mathbf{C}}_0 \bar{\mathbf{x}})$ (3.13)

Fungsi keanggotaan M_1 merupakan fungsi keanggotaan *Triangular*, sementara M_2 dipilih merupakan fungsi keanggotaan *Trapezoidal*. Plot fungsi keanggotaan M_1 dan M_2 ditunjukkan pada Gambar 3.1.

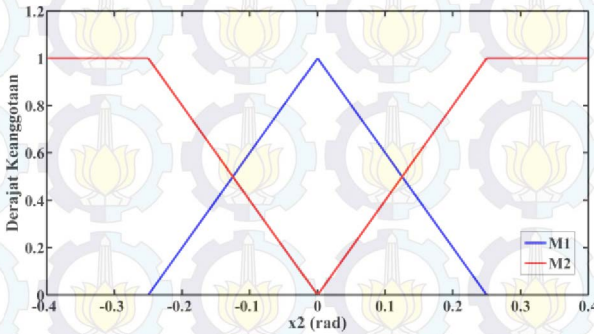
3.3 Kompensator

Kompensator dirancang berdasarkan sinyal referensi yang diberikan pada sistem. Sinyal referensi yang diberikan berupa sinyal sinus dengan frekuensi f Hz dan amplitudo A m yang dapat dituliskan dengan:

$$r(t) = A \sin(2\pi f t) \quad (3.14)$$

Dengan melakukan transformasi Laplace, maka (3.14) dapat dituliskan menjadi

$$R(s) = \frac{A2\pi f}{s^2 + (2\pi f)^2} \quad (3.15)$$



Gambar 3.1 Fungsi Keanggotaan *Plant*, Kontroler, dan *Observer*

dari (3.15) didapatkan matriks \mathbf{A}_c dan \mathbf{B}_c :

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(2\pi f)^2 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ A2\pi f \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

dengan memasukkan nilai $f = 0,1$ Hz dan $A = 0,1$ m, maka nilai matriks \mathbf{A}_c dan \mathbf{B}_c adalah sebagai berikut:

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,3948 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,0628 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

3.4 Perancangan Kontroler *State Feedback* Kompensator Fuzzy T-S

Ada beberapa tahapan yang dilakukan dalam merancang kontroler *state feedback* kompensator fuzzy T-S diantaranya membentuk *augmented fuzzy system*, *pole placement* pada LMI region dan batasan gain kontroler.

3.4.1 *Augmented Fuzzy System* Kontroler

Berdasarkan Subbab 2.7 *augmented fuzzy system* kontroler dapat ditulis dengan:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{x}}_c \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r m_i(x_2(t)) \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i & \mathbf{0} \\ -\mathbf{B}_c \mathbf{C}_t & \mathbf{A}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_c \end{bmatrix} \mathbf{r}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{x}}_c \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r m_i(x_2(t)) \left\{ \left(\begin{bmatrix} \mathbf{A}_i & \mathbf{0} \\ -\mathbf{B}_c \mathbf{C}_t & \mathbf{A}_c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{B}_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} [\mathbf{K}_i \quad \mathbf{K}_{ci}] \right) \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_c \end{bmatrix} \mathbf{r} \right\}$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \sum_{i=1}^r m_i(x_2(t)) \{ (\tilde{\mathbf{A}}_i - \tilde{\mathbf{B}}_i \tilde{\mathbf{K}}_i) \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{N} \mathbf{r} \} \quad (3.18)$$

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_c \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{A}}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i & \mathbf{0} \\ -\mathbf{B}_c \mathbf{C}_t & \mathbf{A}_c \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{B}}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_i = [\mathbf{K}_i \quad \mathbf{K}_{ci}] \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_c \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

dengan mensubstitusi (3.4)-(3.6) dan (3.17) ke dalam (3.18) dan (3.19) didapatkan *augmented fuzzy system* untuk setiap model:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{A}}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2526 & 0 & -0,0001 & 0 & 0 \\ 0 & 15,0421 & 0 & -0,0079 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0,0628 & 0 & 0 & 0 & -0,3948 & 0 \end{bmatrix} \\
\tilde{\mathbf{A}}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2205 & 0 & -0,0001 & 0 & 0 \\ 0 & 14,5058 & 0 & -0,0079 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0,0628 & 0 & 0 & 0 & -0,3948 & 0 \end{bmatrix} \\
\tilde{\mathbf{B}}_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,8272 \\ 1,2370 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{B}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,8259 \\ 1,1966 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,0628 \end{bmatrix} \quad (3.20)
\end{aligned}$$

3.4.2 Pole Placement Kontroler pada LMI Region

Gain kontroler dicari menggunakan LMI region agar *pole* sistem tertutup berada pada daerah yang diinginkan. Dalam Tugas Akhir ini *pole* sistem lup tertutup diletakkan pada daerah D , yaitu daerah irisan antara *half plane* dan kerucut seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2.15. Agar *pole* sistem lup tertutup berada pada daerah tersebut, maka kondisi berikut harus dipenuhi:

1. Half plane

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{P}}_i &> 0 \\
\tilde{\mathbf{P}}_i \tilde{\mathbf{A}}_i^T + \tilde{\mathbf{A}}_i \tilde{\mathbf{P}}_i - \tilde{\mathbf{B}}_i \tilde{\mathbf{Y}}_i - \tilde{\mathbf{Y}}_i^T \tilde{\mathbf{B}}_i^T + 2\gamma_k \tilde{\mathbf{P}}_i &< 0 \quad (3.21)
\end{aligned}$$

2. Kerucut

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{P}}_i &> 0 \\
\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^T & \alpha \end{bmatrix} &< 0 \quad (3.22)
\end{aligned}$$

dengan

$$\alpha = \sin \theta_k \left(\tilde{\mathbf{P}}_i \tilde{\mathbf{A}}_i^T + \tilde{\mathbf{A}}_i \tilde{\mathbf{P}}_i - \tilde{\mathbf{B}}_i \tilde{\mathbf{Y}}_i - \tilde{\mathbf{Y}}_i^T \tilde{\mathbf{B}}_i^T \right)$$

$$\beta = \cos \theta_k \left(-\tilde{\mathbf{P}}_i \tilde{\mathbf{A}}_i^T + \tilde{\mathbf{A}}_i \tilde{\mathbf{P}}_i - \tilde{\mathbf{B}}_i \tilde{\mathbf{Y}}_i + \tilde{\mathbf{Y}}_i^T \tilde{\mathbf{B}}_i^T \right)$$

dengan $-\gamma_k$ adalah nilai *pole* sistem lup tertutup terbesar dan θ_k adalah sudut antara sisi miring kerucut dengan sumbu $Re(z)$. Terakhir, nilai *gain* kontroler $\tilde{\mathbf{K}}_i$ dapat dicari dengan $\tilde{\mathbf{K}}_i = \tilde{\mathbf{Y}}_i \tilde{\mathbf{P}}_i^{-1}$.

3.4.3 Batasan *Gain* Kontroler

Penempatan *pole* sistem lup tertutup menggunakan LMI *region* terkadang mengakibatkan *gain* kontroler terlalu besar apabila *pole* sistem lup tertutup semakin kecil. Oleh karena itu batasan *gain* kontroler diperlukan agar *gain* kontroler hasil desain di bawah suatu nilai tertentu. Untuk membatasi *gain* kontroler, maka kondisi di bawah ini harus terpenuhi:

$$\begin{bmatrix} -k_y \mathbf{I} & \tilde{\mathbf{Y}}_i^T \\ \tilde{\mathbf{Y}}_i & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.23)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_i & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & k_p \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \quad (3.24)$$

dengan k_y dan k_p merupakan bilangan positif.

3.4.4 *Gain* Kontroler Hasil Desain

Keseluruhan tahapan desain kontroler *state feedback fuzzy* T-S dapat dirangkum ke dalam Teorema 3.1.

Teorema 3.1. Kontroler *state feedback fuzzy* T-S mampu menjamin kestabilan sistem dengan nilai *pole* sistem lup tertutup berada di sebelah kiri sumbu imajiner dengan memenuhi daerah D dan *gain* yang terbatas apabila terdapat matriks $\tilde{\mathbf{P}}_i > 0$ simetris dan $\tilde{\mathbf{Y}}_i$ yang memenuhi LMI (3.21)–(3.24)

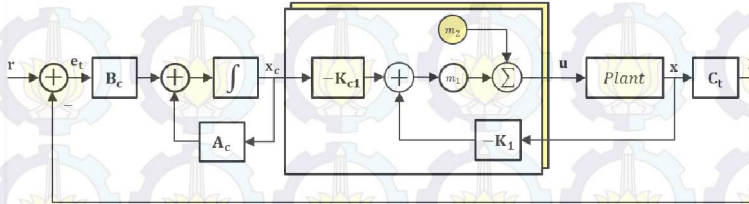
Struktur kontroler *state feedback* kompensator fuzzy T-S ditunjukkan pada Gambar 3.2 dengan parameter kontroler pada Tabel 3.1

Tabel 3.1 Parameter Desain Kontroler

LMI Region		Batasan Gain	
γ_k	θ_k	k_y	k_p
0,8	30°	4640	4640

Berdasarkan parameter pada Tabel 3.1 didapatkan *gain* kontroler hasil desain \tilde{K}_1 dan \tilde{K}_2 sebagai berikut:

$$\tilde{K}_1 = \begin{bmatrix} 63,7832 \\ -208,9139 \\ 49,7122 \\ -54,4060 \\ 173,7200 \\ -487,8034 \end{bmatrix}^T \quad \tilde{K}_2 = \begin{bmatrix} 63,4126 \\ -211,1460 \\ 49,8027 \\ -55,9139 \\ 174,0342 \\ -480,6199 \end{bmatrix}^T \quad (3.25)$$



Gambar 3.2 Struktur Kontroler *State Feedback* Kompensator Fuzzy T-S

3.5 Perancangan *Proportional Multiple Integral Observer* (PMIO) Fuzzy T-S

Pada Subbab ini akan dibahas mengenai PMI *Observer* yang akan digunakan sebagai *sensor fault estimator*. Pertama akan disusun suatu AFS (*Augmented Fuzzy System*) dengan *state* tambahan berupa kesalahan sensor dan derivatifnya hingga derivatif ke- q . Analisa kestabilan Lyapunov, performa H_∞ , dan LMI *region* digunakan untuk menjamin kestabilan sistem dan juga mampu melemahkan efek dari kesalahan sensor hingga derivatif ke- q pada *error* estimasi PMI *Observer* secara

simultan. Berdasarkan analisa tersebut, *gain PMI Observer* dicari menggunakan LMI *toolbox* yang ada pada *software* Matlab.

3.5.1 Augmented Fuzzy System Observer

Sistem Pendulum Kereta memiliki empat *state*, yaitu posisi kereta, posisi pendulum, kecepatan kereta, dan kecepatan pendulum. Diasumsikan semua *state* dari Sistem Pendulum Kereta adalah terukur dan terjadi kesalahan sensor pada *angle encoder* ($k = 1$) yang digunakan untuk mengukur posisi pendulum, maka berdasarkan (2.60) dapat disusun suatu *state-space* Sistem Pendulum Kereta yang mengandung kesalahan sensor:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \sum_{i=1}^r m_i(x_2(t)) \{ \mathbf{A}_i \mathbf{x} + \mathbf{B}_i \mathbf{u} \} \\ \mathbf{x}_f &= \mathbf{x} + \mathbf{D}_f \mathbf{f}_s \\ \mathbf{D}_f &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

Dalam desain *PMI Observer* juga diperlukan penetapan nilai q . Nilai q digunakan untuk menetapkan derivatif ke- q dari kesalahan sensor. Misalkan $q = 2$, maka berdasarkan (2.62) dapat disusun *augmented fuzzy system* yang dituliskan pada (3.27):

$$\begin{aligned} q = 2 &= \text{derivatif ke-} q \text{ yang mampu diestimasi observer} \\ k = 1 &= \text{jumlah kesalahan sensor} \\ n = 4 &= \text{jumlah state Sistem Pendulum Kereta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{n} &= n + kq \\ \bar{n} &= 4 + (1 \times 2) \\ \bar{n} &= 6 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{x}}} &= \sum_{i=1}^r m_i(x_2(t)) \{ \bar{\mathbf{A}}_i \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{B}}_i \mathbf{u} + \mathbf{G} \mathbf{f}_s^q \} \\ \mathbf{x}_f &= \bar{\mathbf{C}}_0 \bar{\mathbf{x}} \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

$$\bar{\mathbf{x}} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad \varphi_1 \quad \varphi_2]^T \quad (3.28)$$

$$\bar{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2525 & 0 & -0,0001 & 0 & 0 \\ 0 & 15,0376 & 0 & -0,0079 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,8272 \\ 1,2370 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

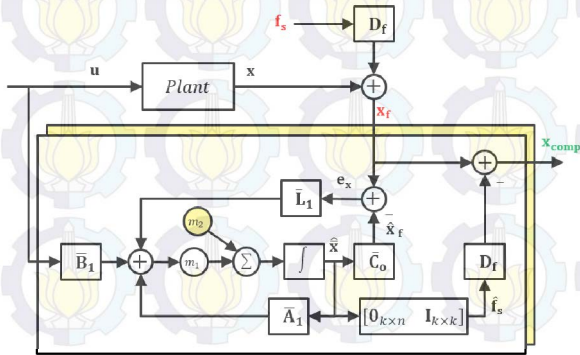
$$\bar{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2205 & 0 & -0,0001 & 0 & 0 \\ 0 & 14,5014 & 0 & -0,0079 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,8259 \\ 1,1967 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

$$\mathbf{G} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]^T \quad \bar{C}_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

dengan $\varphi_1 = \dot{f}_s$ dan $\varphi_2 = f_s$.

3.5.2 Kestabilan Lyapunov PMI Observer

Berdasarkan (3.27)-(3.31) dapat dibentuk PMI Observer (3.32) yang mampu mengestimasi *state* Sistem Pendulum Kereta dan kesalahan sensor beserta derivatifnya. Struktur PMI Observer fuzzy T-S dapat dilihat pada Gambar 3.3:



Gambar 3.3 Struktur PMI Observer Fuzzy T-S

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \sum_{i=1}^r m_i(x_2(t)) \{ \bar{\mathbf{A}}_i \hat{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{B}}_i \mathbf{u} + \bar{\mathbf{L}}_i (\mathbf{x}_f - \bar{\mathbf{C}}_o \hat{\mathbf{x}}) \} \quad (3.32)$$

PMI *Observer* tersebut eksis apabila memenuhi syarat observabilitas:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_n & \mathbf{D}_f \end{bmatrix} = n + k \quad \text{dan} \quad \text{rank} \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A}_i \\ \mathbf{I}_n \end{bmatrix} = n, \forall s \in \mathbb{C}$$

Berdasarkan (2.66) observabilitas tiap model linear dari Sistem Pendulum Kereta dapat diperiksa:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_n & \mathbf{D}_f \end{bmatrix} = 5 \quad \text{dan} \quad \text{rank} \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{I}_n \end{bmatrix} = 4, \forall s \in \mathbb{C} \quad (3.33)$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_n & \mathbf{D}_f \end{bmatrix} = 5 \quad \text{dan} \quad \text{rank} \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{I}_n \end{bmatrix} = 4, \forall s \in \mathbb{C} \quad (3.34)$$

Persamaan (3.33) dan (3.34) menunjukkan bahwa Sistem Pendulum Kereta dengan kesalahan sensor pada sensor posisi pendulum (*angle encoder*) bersifat *observable*.

Error estimasi dari (3.32) dapat diperoleh dengan mengurangi persamaan (3.27) dengan (3.32):

$$\mathbf{e}_x = \sum_{i=1}^r m_i(x_2(t)) \{ \bar{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}} \} \quad (3.35)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_x = \sum_{i=1}^r m_i(x_2(t)) \{ (\bar{\mathbf{A}}_i - \bar{\mathbf{L}}_i \bar{\mathbf{C}}_o) \mathbf{e}_x + \mathbf{G} \mathbf{f}_s^q \} \quad (3.36)$$

Fungsi kestabilan Lyapunov untuk *error* estimasi *state* \mathbf{e}_x adalah

$$V(\mathbf{e}_x) = \mathbf{e}_x^T \bar{\mathbf{P}}_i \mathbf{e}_x \quad (3.37)$$

dengan $\bar{\mathbf{P}}$ merupakan matriks simetris definit positif. Turunan dari fungsi Lyapunov (3.37) dapat dituliskan dengan:

$$\dot{V}(\mathbf{e}_x) = \dot{\mathbf{e}}_x^T \bar{\mathbf{P}}_i \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_x^T \bar{\mathbf{P}}_i \dot{\mathbf{e}}_x \quad (3.38)$$

Dengan mensubstitusi (3.36) ke dalam (3.38) didapatkan turunan fungsi Lyapunov yang dituliskan dalam (3.39):

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{e}_x) &= \sum_{i=1}^r m_i(x_2(t)) [(\bar{\mathbf{A}}_i - \bar{\mathbf{L}}_i \bar{\mathbf{C}}_o) \mathbf{e}_x + \mathbf{G} \mathbf{f}_s^q]^T \bar{\mathbf{P}}_i \mathbf{e}_x \\ &\quad + \mathbf{e}_x^T \bar{\mathbf{P}}_i [(\bar{\mathbf{A}}_i - \bar{\mathbf{L}}_i \bar{\mathbf{C}}_o) \mathbf{e}_x + \mathbf{G} \mathbf{f}_s^q] \\ \dot{V}(\mathbf{e}_x) &= \sum_{i=1}^r m_i(x_2(t)) \left[\mathbf{e}_x^T ((\bar{\mathbf{A}}_i - \bar{\mathbf{L}}_i \bar{\mathbf{C}}_o)^T \bar{\mathbf{P}}_i + \bar{\mathbf{P}}_i (\bar{\mathbf{A}}_i - \bar{\mathbf{L}}_i \bar{\mathbf{C}}_o)) \mathbf{e}_x \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{f}_s^{qT} \mathbf{G}^T \bar{\mathbf{P}}_i \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_x^T \bar{\mathbf{P}}_i \mathbf{G} \mathbf{f}_s^q \right] \end{aligned} \quad (3.39)$$

3.5.3 Performa H_∞ PMI Observer

Berdasarkan Subbab 2.11, performa H_∞ digunakan untuk merancang kontroler yang kokoh terhadap gangguan dari luar. Pada subbab ini performa H_∞ juga diterapkan dalam tahapan desain PMI *Observer* agar *error* estimasi mampu kokoh terhadap adanya kesalahan sensor derivatif ke- q . Untuk menjamin sistem lup tertutup stabil asimtotis dan memenuhi performa H_∞ , maka dalam desain PMI *Observer* harus memenuhi pertidaksamaan berikut

$$\dot{V}(\mathbf{e}_x) + \frac{1}{\gamma_{pmi_i}} \mathbf{e}_x^T \mathbf{C}_p^T \mathbf{C}_p \mathbf{e}_x - \gamma_{pmi_i} \mathbf{f}_s^{qT} \mathbf{f}_s^q < 0 \quad (3.40)$$

dengan \mathbf{C}_p adalah matriks pembobot dengan dimensi bersesuaian, γ_{pmi_i} adalah level pelemahan \mathbf{f}_s^q pada \mathbf{e}_x . Dengan mensubstitusi (3.39) ke dalam (3.40) didapatkan pertidaksamaan berikut:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^r m_i(x_2(t)) \left[\mathbf{e}_x^T ((\bar{\mathbf{A}}_i - \bar{\mathbf{L}}_i \bar{\mathbf{C}}_o)^T \bar{\mathbf{P}}_i + \bar{\mathbf{P}}_i (\bar{\mathbf{A}}_i - \bar{\mathbf{L}}_i \bar{\mathbf{C}}_o)) \mathbf{e}_x + \mathbf{f}_s^{qT} \mathbf{G}^T \bar{\mathbf{P}}_i \mathbf{e}_x \right. \\
& \quad \left. + \mathbf{e}_x^T \bar{\mathbf{P}}_i \mathbf{G} \mathbf{f}_s^q + \frac{1}{\gamma_{pmi_i}} \mathbf{e}_x^T \mathbf{C}_p^T \mathbf{C}_p \mathbf{e}_x - \gamma_{pmi_i} \mathbf{f}_s^{qT} \mathbf{f}_s^q \right] < 0 \\
& \sum_{i=1}^r m_i(x_2(t)) \left[\mathbf{e}_x^T \left((\bar{\mathbf{A}}_i - \bar{\mathbf{L}}_i \bar{\mathbf{C}}_o)^T \bar{\mathbf{P}}_i + \bar{\mathbf{P}}_i (\bar{\mathbf{A}}_i - \bar{\mathbf{L}}_i \bar{\mathbf{C}}_o) + \frac{1}{\gamma_{pmi_i}} \mathbf{C}_p^T \mathbf{C}_p \right) \mathbf{e}_x \right. \\
& \quad \left. + \mathbf{f}_s^{qT} \mathbf{G}^T \bar{\mathbf{P}}_i \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_x^T \bar{\mathbf{P}}_i \mathbf{G} \mathbf{f}_s^q - \gamma_{pmi_i} \mathbf{f}_s^{qT} \mathbf{f}_s^q \right] < 0
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Pertidaksamaan (3.41) dapat ditulis ke dalam bentuk matriks

$$\sum_{i=1}^r m_i(x_2(t)) \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{f}_s^q \end{bmatrix}^T \Psi \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{f}_s^q \end{bmatrix} \right\} < 0 \tag{3.42}$$

dengan:

$$\Psi = \begin{bmatrix} (\bar{\mathbf{A}}_i - \bar{\mathbf{L}}_i \bar{\mathbf{C}}_o)^T \bar{\mathbf{P}}_i + \bar{\mathbf{P}}_i (\bar{\mathbf{A}}_i - \bar{\mathbf{L}}_i \bar{\mathbf{C}}_o) + \frac{1}{\gamma_{pmi_i}} \mathbf{C}_p^T \mathbf{C}_p & \bar{\mathbf{P}}_i \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T \bar{\mathbf{P}}_i & -\gamma_{pmi_i} \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

Pertidaksamaan (3.42) dapat bernilai < 0 dengan membuktikan bahwa $\Psi < 0$, sehingga (3.42) dapat dituliskan menjadi (3.43):

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_i^T \bar{\mathbf{P}}_i + \bar{\mathbf{P}}_i \bar{\mathbf{A}}_i - \bar{\mathbf{P}}_i \bar{\mathbf{L}}_i \bar{\mathbf{C}}_o - \bar{\mathbf{C}}_o^T \bar{\mathbf{L}}_i^T \bar{\mathbf{P}}_i + \frac{1}{\gamma_{pmi_i}} \mathbf{C}_p^T \mathbf{C}_p & \bar{\mathbf{P}}_i \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T \bar{\mathbf{P}}_i & -\gamma_{pmi_i} \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \tag{3.43}$$

Objektif desain yaitu meminimumkan nilai γ_{pmi_i} dengan batasan $\bar{\mathbf{P}}_i > 0$ dan (3.43). Pada (3.43), matriks $\bar{\mathbf{P}}_i$, $\bar{\mathbf{L}}_i$, dan konstanta γ_{pmi_i} merupakan variabel yang nilainya dicari. Pertidaksamaan (3.43) disebut BMI (*Bilinear Matrix Inequality*) karena entri pertama dari matriks

mengandung perkalian dua matriks variabel yaitu $\bar{\mathbf{P}}_i \bar{\mathbf{L}}_i$ dan $\bar{\mathbf{L}}_i^T \bar{\mathbf{P}}_i$. Oleh karenanya perkalian langsung antara dua matriks variabel harus dihindari. Dimisalkan $\bar{\mathbf{H}}_i = \bar{\mathbf{P}}_i \bar{\mathbf{L}}_i$, dimana $\bar{\mathbf{H}}_i$ adalah matriks bantu, maka perkalian langsung dua matriks variabel dapat dihindari. Dengan mensubstitusi $\bar{\mathbf{H}}_i = \bar{\mathbf{P}}_i \bar{\mathbf{L}}_i$ ke dalam (3.43), didapatkan (3.44):

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_i^T \bar{\mathbf{P}}_i + \bar{\mathbf{P}}_i \bar{\mathbf{A}}_i - \bar{\mathbf{H}}_i \bar{\mathbf{C}}_o - \bar{\mathbf{C}}_o^T \bar{\mathbf{H}}_i^T + \frac{1}{\gamma_{pmi_i}} \mathbf{C}_p^T \mathbf{C}_p & \bar{\mathbf{P}}_i \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T \bar{\mathbf{P}}_i & -\gamma_{pmi_i} \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.44)$$

Dengan menerapkan *Schur Complement* pada (3.44) dapat diperoleh bentuk (3.45):

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_i^T \bar{\mathbf{P}}_i + \bar{\mathbf{P}}_i \bar{\mathbf{A}}_i - \bar{\mathbf{H}}_i \bar{\mathbf{C}}_o - \bar{\mathbf{C}}_o^T \bar{\mathbf{H}}_i^T & \bar{\mathbf{P}}_i \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T \bar{\mathbf{P}}_i & -\gamma_{pmi_i} \mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_p^T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \frac{1}{\gamma_{pmi_i}} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_p & \mathbf{0} \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_i^T \bar{\mathbf{P}}_i + \bar{\mathbf{P}}_i \bar{\mathbf{A}}_i - \bar{\mathbf{H}}_i \bar{\mathbf{C}}_o - \bar{\mathbf{C}}_o^T \bar{\mathbf{H}}_i^T & \bar{\mathbf{P}}_i \mathbf{G} & \mathbf{C}_p^T \\ \mathbf{G}^T \bar{\mathbf{P}}_i & -\gamma_{pmi_i} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_p & \mathbf{0} & -\gamma_{pmi_i} \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.45)$$

Pembahasan performa H_∞ pada PMI *Observer* dapat dirangkum menjadi suatu teorema berikut:

Teorema 3.2. PMI *Observer* mampu melemahkan pengaruh \mathbf{f}_s^q pada *error* estimasi *state* augmentasi apabila terdapat matriks $\bar{\mathbf{P}}_i$ simetris positif definit dan matriks $\bar{\mathbf{H}}_i$ yang meminimalkan γ_{pmi_i} dengan memenuhi batasan LMI (3.45) atau dapat dituliskan dengan:

$$\begin{aligned} & \min \gamma_{pmi_i} \\ & \text{s.t. } \bar{\mathbf{P}}_i > \mathbf{0} \\ & \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_i^T \bar{\mathbf{P}}_i + \bar{\mathbf{P}}_i \bar{\mathbf{A}}_i - \bar{\mathbf{H}}_i \bar{\mathbf{C}}_o - \bar{\mathbf{C}}_o^T \bar{\mathbf{H}}_i^T & \bar{\mathbf{P}}_i \mathbf{G} & \mathbf{C}_p^T \\ \mathbf{G}^T \bar{\mathbf{P}}_i & -\gamma_{pmi_i} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_p & \mathbf{0} & -\gamma_{pmi_i} \mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \end{aligned}$$

3.5.4 Pole Placement PMI Observer pada LMI Region

Selain syarat stabilitas (analisa Lyapunov) dan kekokohan terhadap efek \mathbf{f}_s^q pada *error* estimasi *state augmentasi*, estimasi *state augmentasi* yang cepat dan *overshoot* seminimal mungkin menjadi tujuan dalam desain PMI Observer. Hal ini bisa dicapai dengan meletakkan *pole* PMI Observer jauh di sebelah kiri sumbu imajiner dengan bagian imajiner didesain agar memenuhi spesifikasi desain *maximum overshoot*. Seperti yang telah dijelaskan pada Subbab 2.12, ada tiga bentuk LMI region yang dapat digunakan untuk meletakkan *pole* PMI Observer yaitu *half plane*, kerucut, dan lingkaran. Dalam Tugas Akhir ini, LMI region yang dipilih adalah irisan antara *half plane* dan kerucut seperti yang tertera pada Gambar 2.15.

LMI region PMI Observer pada daerah *half plane* dan kerucut dapat ditulis sebagai berikut:

1. Half plane

$$\begin{aligned} & \bar{\mathbf{P}}_i > 0 \\ & \bar{\mathbf{A}}_i^T \bar{\mathbf{P}}_i + \bar{\mathbf{P}}_i \bar{\mathbf{A}}_i - \bar{\mathbf{H}}_i \bar{\mathbf{C}}_o - \bar{\mathbf{C}}_o^T \bar{\mathbf{H}}_i^T + 2\gamma_{obs} \bar{\mathbf{P}}_i < 0 \end{aligned} \quad (3.46)$$

2. Kerucut

$$\left. \begin{aligned} & \bar{\mathbf{P}}_i > 0 \\ & \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^T & \alpha \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.47)$$

dengan:

$$\begin{aligned} \alpha &= \sin \theta_{obs} \left(\bar{\mathbf{A}}_i^T \bar{\mathbf{P}}_i + \bar{\mathbf{P}}_i \bar{\mathbf{A}}_i - \bar{\mathbf{H}}_i \bar{\mathbf{C}}_o - \bar{\mathbf{C}}_o^T \bar{\mathbf{H}}_i^T \right) \\ \beta &= \cos \theta_{obs} \left(-\bar{\mathbf{A}}_i^T \bar{\mathbf{P}}_i + \bar{\mathbf{P}}_i \bar{\mathbf{A}}_i - \bar{\mathbf{H}}_i \bar{\mathbf{C}}_o + \bar{\mathbf{C}}_o^T \bar{\mathbf{H}}_i^T \right) \end{aligned}$$

dengan $-\gamma_{obs}$ adalah nilai *pole* PMI Observer terbesar dan θ_{obs} adalah sudut antara sisi miring kerucut dengan sumbu $Re(z)$.

3.5.5 Gain PMI Observer Hasil Desain

Berdasarkan Subsubbab 3.5.3 dan 3.5.4, maka Teorema 3.2 dapat diperluas menjadi Teorema 3.3

Teorema 3.3. PMI *Observer* mampu mengestimasi *state* augmentasi secara simultan sekaligus melemahkan pengaruh \mathbf{f}_s^q pada *error* estimasi *state* augmentasi apabila terdapat matriks $\bar{\mathbf{P}}_i$ simetris positif definit dan matriks $\bar{\mathbf{H}}_i$ yang meminimalkan γ_{pmi_i} dengan memenuhi batasan LMI (3.45)-(3.47) atau dapat dituliskan dengan

$$\begin{aligned} \min \quad & \gamma_{pmi_i} \\ \text{s.t.} \quad & 1. \quad \bar{\mathbf{P}}_i > 0 \\ & 2. \quad \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_i^T \bar{\mathbf{P}}_i + \bar{\mathbf{P}}_i \bar{\mathbf{A}}_i - \bar{\mathbf{H}}_i \bar{\mathbf{C}}_o - \bar{\mathbf{C}}_o^T \bar{\mathbf{H}}_i^T & \bar{\mathbf{P}}_i \mathbf{G} & \mathbf{C}_p^T \\ \mathbf{G}^T \bar{\mathbf{P}}_i & -\gamma_{pmi} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_p & \mathbf{0} & -\gamma_{pmi} \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \\ & 3. \quad \bar{\mathbf{A}}_i^T \bar{\mathbf{P}}_i + \bar{\mathbf{P}}_i \bar{\mathbf{A}}_i - \bar{\mathbf{H}}_i \bar{\mathbf{C}}_o - \bar{\mathbf{C}}_o^T \bar{\mathbf{H}}_i^T + 2\gamma_{obs} \bar{\mathbf{P}}_i < 0 \\ & 4. \quad \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^T & \alpha \end{bmatrix} < 0 \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned} \alpha &= \sin \theta_{obs} \left(\bar{\mathbf{A}}_i^T \bar{\mathbf{P}}_i + \bar{\mathbf{P}}_i \bar{\mathbf{A}}_i - \bar{\mathbf{H}}_i \bar{\mathbf{C}}_o - \bar{\mathbf{C}}_o^T \bar{\mathbf{H}}_i^T \right) \\ \beta &= \cos \theta_{obs} \left(-\bar{\mathbf{A}}_i^T \bar{\mathbf{P}}_i + \bar{\mathbf{P}}_i \bar{\mathbf{A}}_i - \bar{\mathbf{H}}_i \bar{\mathbf{C}}_o + \bar{\mathbf{C}}_o^T \bar{\mathbf{H}}_i^T \right) \end{aligned}$$

Nilai *gain* PMI *Observer* dapat dicari menggunakan dengan LMI *toolbox* pada *software* Matlab. Dengan memberikan nilai $\gamma_{obs} = 250$, $\theta_{obs} = 37^\circ$, dan $\mathbf{C}_p = 0,435\mathbf{I}_{6 \times 6}$ didapatkan matriks *gain* PMI *Observer* $\bar{\mathbf{L}}_1$ dan $\bar{\mathbf{L}}_2$, serta level pelemahan γ_{pmi_1} dan γ_{pmi_2} sebagai berikut:

$$\bar{\mathbf{L}}_1 = 1 \times 10^5 \begin{bmatrix} 0,0036 & -0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ -0,0000 & -0,0039 & 0,0046 & 0,2727 \\ 0,0000 & -0,0000 & 0,0036 & 0,0002 \\ -0,0000 & -0,0002 & 0,0002 & 0,0155 \\ 0,0000 & 4,6756 & -0,0028 & -0,1660 \\ 0,0000 & 0,0210 & -0,0046 & -0,2730 \end{bmatrix}$$

$$\bar{L}_2 = 1 \times 10^5 \begin{bmatrix} 0,0036 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ -0,0000 & -0,0069 & 0,0043 & 0,2854 \\ 0,0000 & -0,0000 & 0,0036 & 0,0002 \\ -0,0000 & -0,0004 & 0,0002 & 0,0157 \\ 0,0000 & 4,5999 & -0,0036 & -0,2384 \\ 0,0000 & 0,0238 & -0,0043 & -0,2860 \end{bmatrix}$$

$$\gamma_{pmi_1} = 0,0024 \quad \gamma_{pmi_2} = 0,0021$$

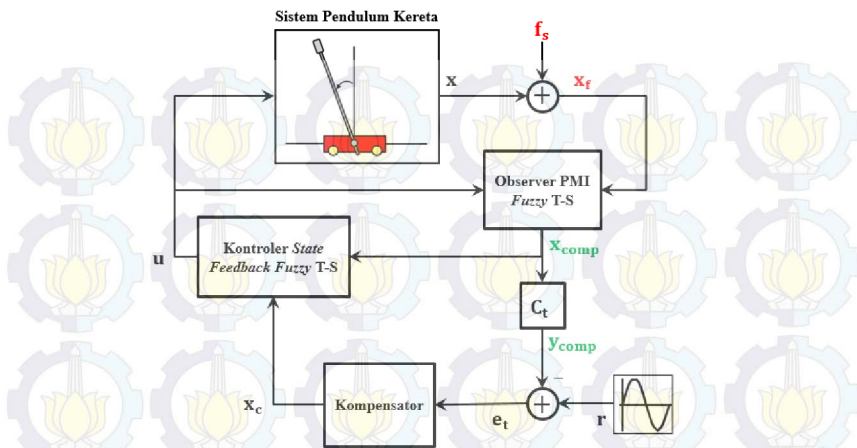
3.6 Diagram Simulink untuk Simulasi dan Implementasi

Keseluruhan hasil rancangan dapat disusun menjadi sebuah diagram blok sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 3.4. Berdasarkan Gambar 3.4 maka dapat disusun diagram Simulink untuk simulasi dan implementasi seperti yang ditunjukkan pada Gambar 3.5 dan Gambar 3.6. Blok kesalahan berisi beberapa macam jenis kesalahan yaitu *bias faults*, *loss of sensitivity*, *loss of measurement*, dan *stuck sensor reading*. Kesalahan tersebut dimodifikasi sedemikian rupa sehingga dapat dimodelkan menjadi *additive faults* yang mempengaruhi *state* sistem. Hasil dari operasi penambahan kesalahan pada *state* sistem disebut dengan *state* sistem *faulty* (\mathbf{x}_f).

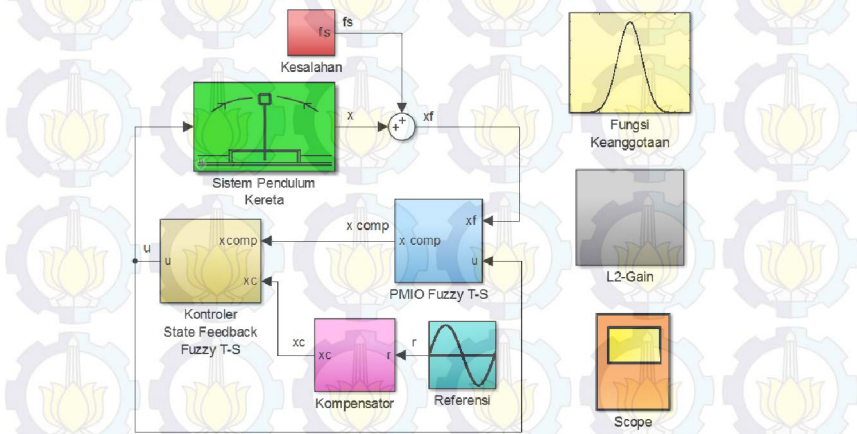
State sistem *faulty* akan menjadi masukan pada blok *observer*. Selain *state* sistem *faulty*, masukan blok *observer* adalah sinyal kontrol, sedangkan keluarannya berupa *state* Sistem Pendulum Kereta yang telah dikompensasi (\mathbf{x}_{comp}). Dengan menggunakan aturan *fuzzy*, maka tiap model linear *observer* akan diberi bobot berdasarkan derajat keanggotaannya dan akan mengestimasi *state* sistem dan kesalahan sensor.

Sinyal referensi berupa sinyal sinusoidal dengan $A = 0,1$ m dan $f = 0,1$ Hz dibangkitkan pada blok referensi. Sinyal referensi nantinya akan digunakan sebagai masukan pada blok kompensator untuk dibandingkan nilainya dengan posisi kereta.

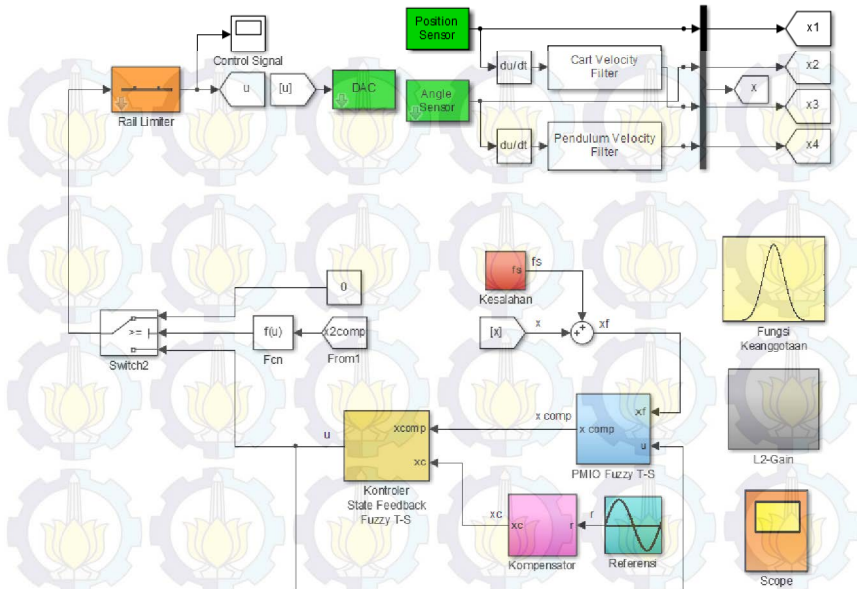
Perbedaan antara sinyal referensi dengan posisi kereta disebut dengan *error tracking* (e_e). *Error tracking* akan digunakan sebagai masukan pada persamaan *state* kompensator dan keluarannya adalah *state* kompensator (\mathbf{x}_c). Persamaan *state* kompensator didapat dari transformasi Laplace pada sinyal referensi, yaitu sinyal sinusoidal dengan $A = 0,1$ m dan $f = 0,1$ Hz.



Gambar 3.4 Skenario *Fault Tolerant Control* (FTC) Hasil Perancangan



Gambar 3.5 Diagram Simulink untuk Simulasi



Gambar 3.6 Diagram Simulink untuk Implementasi

Sinyal kontrol dihasilkan pada blok kontroler. Sinyal kontrol tersebut didapatkan dari penjumlahan antara *state* Sistem Pendulum Kereta dan *state* kompensator yang secara berurutan dikali dengan *gain state feedback* (K) dan *gain* kompensator (K_c). Kedua *gain* tersebut dibobotkan berdasarkan derajat keanggotaan masing-masing model. Untuk membatasi nilai sinyal kontrol yang masuk ke Sistem Pendulum Kereta maka dipasang blok saturasi.

Posisi pendulum sebagai variabel premis digunakan untuk menentukan derajat keanggotaan tiap model. Proses penghitungan nilai derajat keanggotaan dilakukan pada Blok Fungsi Keanggotaan. Jenis fungsi keanggotaan yang dipilih adalah *Triangular* dan *Trapezoidal* untuk aturan 1 dan aturan 2.

Untuk mengamati perbandingan L_2 -Norm dari *error* estimasi *state* augmentasi (e_x) dengan L_2 -Norm dari turunan ke- q dari kesalahan sensor (\dot{f}_s), maka blok L_2 -Gain dibuat. Nilai tersebut dibandingkan dengan nilai γ_{pmi} yang telah diperoleh pada Subsubbab 3.5.5.

Perbedaan antara diagram simulink untuk simulasi dan implementasi terletak pada blok *Rail limiter*, DAC, *Switch*, dan *Filter*. Blok *Rail limiter* digunakan untuk membatasi posisi kereta pada rentang nilai -0,4 m hingga 0,4 m. Blok DAC digunakan untuk konversi sinyal kontrol dalam satuan Newton menjadi satuan Volt (diasumsikan linear) dengan rumus $V = 1/9u$. DAC yang digunakan bekerja pada $\pm 2,5$ Volt. Oleh karena itu, tegangan yang digunakan dibatasi pada $\pm 1,9$ Volt. Blok *Switch* digunakan untuk mengaktifkan kontroler saat pendulum memasuki zona stabilisasi, dan blok *Filter* digunakan untuk menghilangkan *noise* kecepatan kereta dan kecepatan pendulum yang diperoleh dari turunan *position encoder* dan *angle encoder*.

BAB 4

PENGUJIAN DAN ANALISIS DATA

Pada bab ini akan dibahas mengenai hasil pengujian simulasi dan implementasi sistem kontrol *tracking* toleransi kesalahan pada Sistem Pendulum Kereta. Parameter Sistem Pendulum Kereta, kontroler, dan *observer* didapatkan dari hasil perancangan pada Bab 3. Pengujian dilakukan dengan memberikan kesalahan berupa bias, *loss of sensitivity*, *loss of measurement*, dan *stuck sensor reading* pada posisi pendulum.

4.1 Hasil Simulasi

Pengujian hasil perancangan pada Bab 3 dilakukan dengan diagram Simulink yang tertera pada Gambar 3.3. Berdasarkan hasil perancangan pada Bab 3, didapatkan *eigen value* sistem lup tertutup dan *observer* sebagai berikut:

Tabel 4.1 Perbandingan *Eigen Value* Sistem dan *Observer*

<i>Eigen Value</i> Sistem		<i>Eigen Value</i> Observer	
Subsistem 1	Subsistem 2	Subsistem 1	Subsistem 2
$-0,876 + 0,453i$	$-0,873 + 0,454i$	$-339,5 + 0,002i$	-336,00
$-0,876 - 0,453i$	$-0,873 - 0,454i$	$-339,5 - 0,002i$	-340,10
-0,9400	-0,93800	-357,10	-356,80
-2,9160	-2,90900	-357,10	-356,80
-3,8820	-3,81260	-1213,4	-1221,1
-16,693	-16,3841	-1371,0	-1363,3

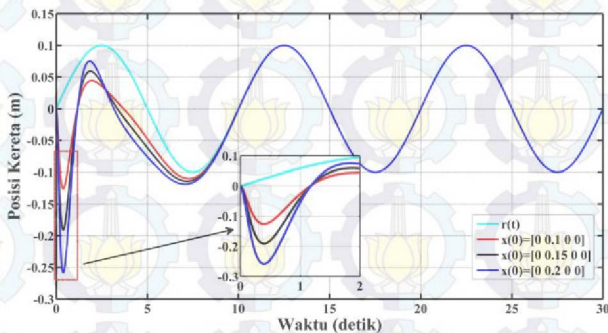
Berdasarkan Tabel 4.1 terlihat bahwa *eigen value* sistem lup tertutup dan *observer* memiliki bagian *real* yang negatif sehingga hasil perancangan pada Bab 3 dapat menjamin kestabilan sistem.

Hasil simulasi pada keadaan nominal dengan variasi *initial condition* akan ditunjukkan pada Subsubbab 4.1.1, dan pengujian terhadap *bias faults*, *loss of sensitivity*, *loss of measurement*, dan *stuck sensor reading* akan dibahas pada Subsubbab 4.1.2-4.1.5. Selanjutnya hasil implementasi akan dibahas pada Subbab 4.2. Pertama-tama akan diuji saat keadaan nominal dan kemudian akan diuji dengan kesalahan sensor berupa *bias faults* dan *loss of measurement*.

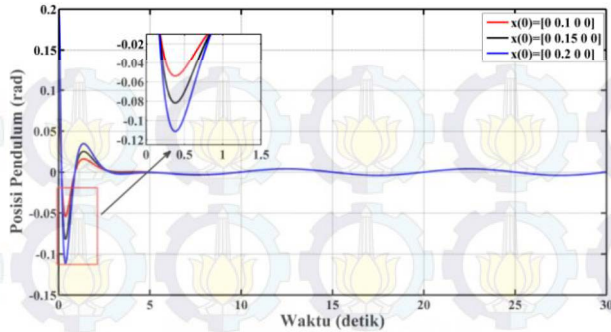
4.1.1 Keadaan Nominal (*Fault Free Case*)

Hasil simulasi posisi kereta saat keadaan nominal ditunjukkan pada Gambar 4.1. Dari gambar tersebut terlihat bahwa terjadi *undershoot* sesaat setelah $t = 0$ detik. *Undershoot* paling besar terjadi pada posisi kereta dengan *initial condition* posisi pendulum sebesar 0,2 rad yakni 0,258 m. Waktu yang dibutuhkan kereta untuk mengikuti sinyal referensi yakni sekitar 9,442 s. *Integral Absolute Error* (IAE) digunakan sebagai ukuran performa *tracking* posisi kereta terhadap sinyal referensi. Semakin kecil nilai IAE maka semakin baik performa yang diberikan posisi kereta. Nilai IAE untuk posisi kereta dengan *initial condition* 0,1 rad; 0,15 rad; dan 0,2 rad secara berturut-turut adalah 0,4345 m·detik; 0,5133 m·detik; dan; 0,5955 m·detik. Dengan nilai IAE yang kecil, performa yang diberikan posisi kereta dalam mengikuti sinyal referensi dapat dikatakan baik.

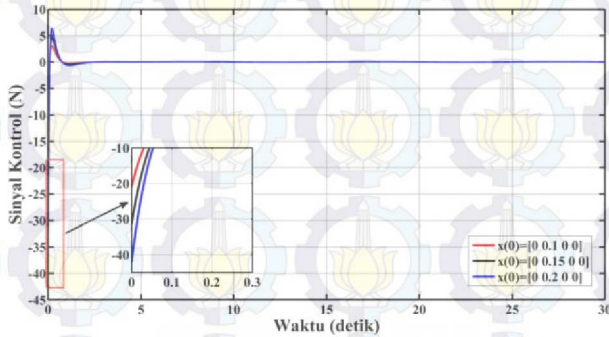
Respon posisi pendulum dapat dilihat pada Gambar 4.2. Sama seperti respon posisi kereta, posisi pendulum sempat mengalami *undershoot* pada saat transien yang besarnya bergantung pada besar *initial condition* yang diberikan. Waktu yang dibutuhkan pendulum untuk bertahan pada posisi terbaliknya yaitu sekitar 4,634 detik. *Initial condition* pada posisi pendulum juga mempengaruhi besarnya sinyal kontrol pada kondisi awal. Nilai absolut sinyal kontrol terbesar yakni bernilai 42,1399 N. Sinyal kontrol dapat dilihat pada Gambar 4.3.



Gambar 4.1 Respon Posisi Kereta dengan Berbagai *Initial Condition* pada Posisi Pendulum

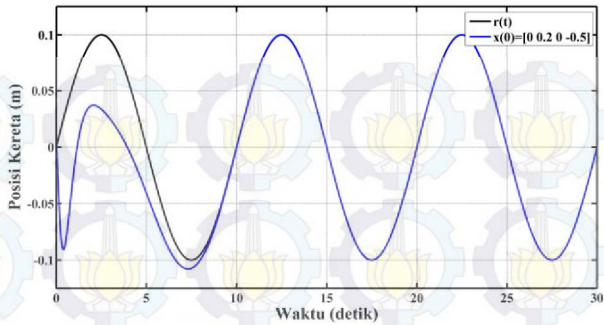


Gambar 4.2 Respon Posisi Pendulum dengan Berbagai *Initial Condition* pada Posisi Pendulum

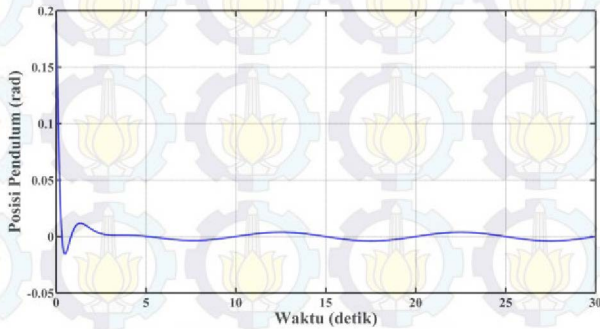


Gambar 4.3 Sinyal Kontrol dengan Berbagai *Initial Condition* pada Posisi Pendulum

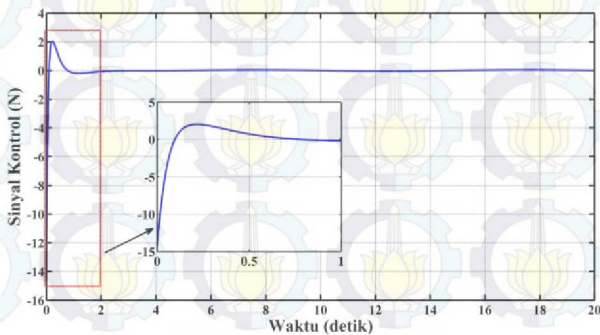
Untuk mengurangi nilai sinyal kontrol pada kondisi awal, maka diberikan nilai pada *initial condition* kecepatan pendulum yang arahnya berlawanan dengan arah jatuh pendulum. Respon posisi kereta, posisi pendulum, dan sinyal kontrol dengan *initial condition* pada posisi pendulum dan kecepatan pendulum digambarkan secara berturut-turut pada Gambar 4.4-4.6. Terlihat pada Gambar 4.4 bahwa posisi kereta dengan *initial condition* pada kecepatan pendulum memiliki nilai *undershoot* yang lebih kecil daripada posisi kereta tanpa *initial condition* pada kecepatan pendulum.



Gambar 4.4 Respon Posisi Kereta dengan *Initial Condition* pada Posisi Pendulum dan Kecepatan Pendulum



Gambar 4.5 Respon Posisi Pendulum dengan *Initial Condition* pada Posisi Pendulum dan Kecepatan Pendulum



Gambar 4.6 Sinyal Kontrol dengan *Initial Condition* pada Posisi Pendulum dan Kecepatan Pendulum

Dengan pemberian *initial condition* pada kecepatan pendulum mengakibatkan posisi pendulum terdorong untuk segera menuju posisi terbaliknya (0 rad), oleh karenanya nilai *undershoot* dari posisi pendulum mengecil dan sinyal kontrol yang digunakan untuk mendorong kereta menjadi mengecil pula. Secara keseluruhan performa nominal sistem dapat dikatakan baik dalam mengikuti sinyal referensi.

Dari penjelasan-penjelasan di atas maka karakteristik respon saat keadaan nominal dapat dituliskan secara ringkas ke dalam Tabel 4.2:

Tabel 4.2 Karakteristik Respon Sistem Saat Keadaan Nominal

<i>Initial Condition</i>	x_1		x_2	u
	<i>Maximum Undershoot</i> (m)	IAE (m·detik)	<i>Maximum Undershoot</i> (rad)	Nilai Absolut Maksimal (N)
x_2 0,1 rad	0,1259	0,4345	0,054	20,9807
$x_2 = 0,15$ rad	0,1908	0,5133	0,082	31,5380
$x_2 = 0,2$ rad	0,2584	0,5955	0,111	42,1399
$x_2 = 0,2$ rad dan $x_4 = -0,5$ rad/detik	0,1079	0,3916	0,015	14,3316

4.1.2 Pengujian *Bias Sensor Faults* ($\alpha_i = 1$ dan $\beta_i \neq 0$)

Kesalahan bias terjadi pada sensor posisi pendulum. Diasumsikan kesalahan bias sebesar 0,025 rad pada $t \geq 10$ detik dengan penulisan notasi matematika sebagai berikut:

$$x_{2f} = x_2 + \beta_2$$

$$\beta_2 = \begin{cases} 0 & \text{rad ; } 0 \leq t < 10 \text{ detik} \\ 0,025 & \text{rad ; } t \geq 10 \text{ detik} \end{cases}$$

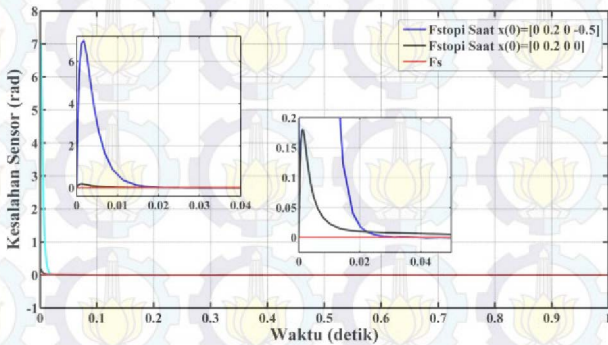
Berdasarkan (2.12) kesalahan bias dapat dimodelkan menjadi *additive fault* yang dituliskan dengan

$$f_{s2} = (\alpha_2 - 1)x_2 + \beta_2$$

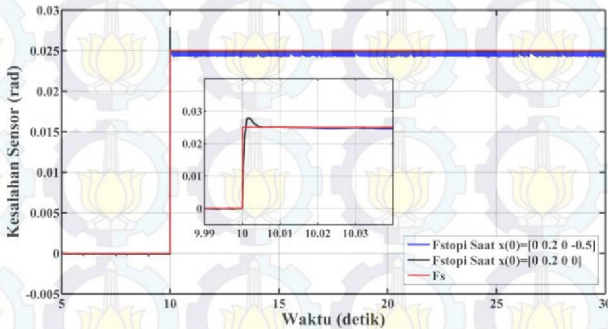
$$f_{s2} = \beta_2$$

Kesalahan bias dan estimasinya ditunjukkan pada Gambar 4.7 dan Gambar 4.8

Initial condition dari *observer* diberi nilai $\hat{\mathbf{x}}(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$. Terlihat pada Gambar 4.7 bahwa semakin besar perbedaan nilai *initial condition* dari *plant* dan *observer*, maka akan terjadi *error* estimasi kesalahan yang sangat besar pada waktu awal simulasi. Pada detik kesepuluh, estimasi kesalahan dan nilai aktualnya memiliki perbedaan yang relatif kecil yaitu sekitar 5×10^{-5} rad. Hal ini menyebabkan estimasi kesalahan dapat dilakukan sangat cepat walaupun kesalahannya terjadi secara cepat (*abrupt fault*). Karakteristik estimasi kesalahan bias dapat dilihat pada Tabel 4.3.



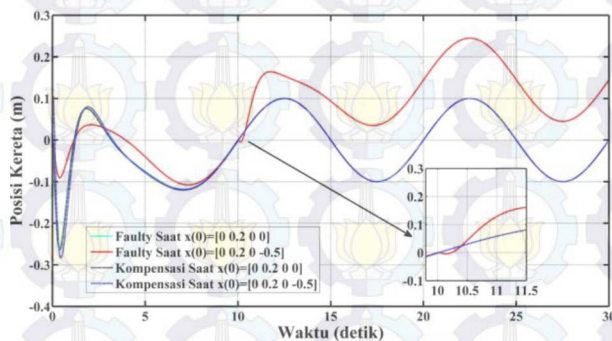
Gambar 4.7 Bias Sensor Fault dan Estimasinya Saat $0 \leq t \leq 1$ detik



Gambar 4.8 Bias Sensor Fault dan Estimasinya Saat $5 \leq t \leq 30$ detik

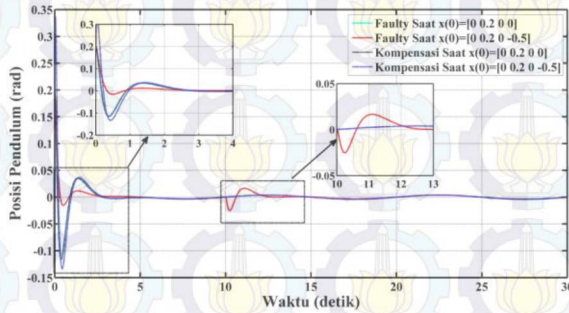
Tabel 4.3 Karakteristik Estimasi Kesalahan Bias

Initial Condition	0 ≤ t ≤ 0,1 detik		10 ≤ t ≤ 10,1 detik		IAE (rad·detik)
	Overshoot (rad)	t _s (2%) (detik)	Overshoot (rad)	t _s (2%) (detik)	
x ₂ 0,1 rad	0,0841	0,0081	0,0016	0,0068	0,00154
x ₂ 0,2 rad	0,168	0,0081	0,0017	0,0078	0,00297
x ₂ 0,2 rad dan x ₄ = -0,5 rad/detik	7,201	0,0842	0,0017	0,0084	0,03985

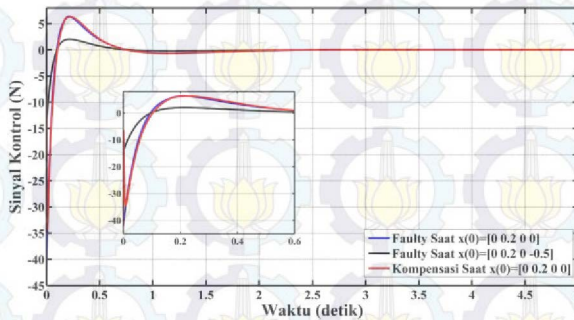
**Gambar 4.9** Respon Posisi Kereta *Faulty* dan Kompensasi

Respon posisi kereta saat terjadi kesalahan dan dikompensasi dengan FTC ditunjukkan pada Gambar 4.9. Dapat dilihat pada gambar bahwa saat terjadi kesalahan bias pada $t \geq 10$ detik, posisi kereta tanpa kompensasi FTC mengalami *undershoot* selama 0,4 detik dan kemudian berosilasi pada 0,14 m. Bentuk respon posisi kereta dengan kompensasi FTC saat $t \geq 10$ detik memiliki karakteristik hampir sama dengan keadaan nominal. Namun saat kondisi awal, respon posisi kereta mengalami *undershoot* sebesar 0,0058 m untuk kondisi awal posisi pendulum 0,2 rad. Sementara untuk kondisi awal posisi pendulum 0,2 rad dan kecepatan sudutnya -0,5 rad/detik, respon posisi kereta mengalami *undershoot* sebesar 0,19276 m. Sama halnya dengan respon posisi kereta, respon posisi pendulum (Gambar 4.10) tanpa kompensasi FTC mengalami *undershoot* pada $t = 10$ detik sebesar 0,02505 rad, sedangkan saat dikompensasi dengan FTC, posisi pendulum memiliki respon yang serupa dengan kondisi nominal. Namun, respon posisi pendulum sempat mengalami *undershoot* pada saat $t = 0,45$ detik sebesar 0,0049 rad untuk

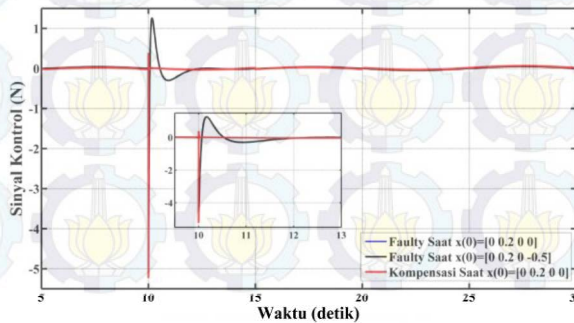
kondisi awal posisi pendulum 0,2 rad dan 0,1085 rad untuk kondisi awal posisi pendulum sebesar 0,2 rad dan kecepatan sudutnya sebesar -0,5 rad/detik.



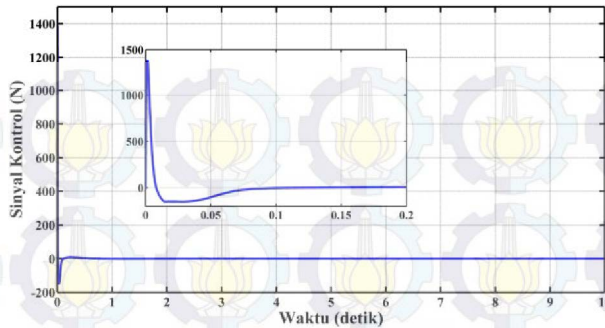
Gambar 4.10 Respon Posisi Pendulum *Faulty* dan Kompensasi



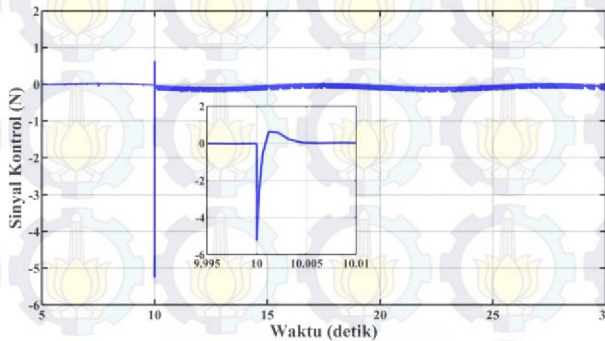
Gambar 4.11 Sinyal Kontrol Saat $0 \leq t \leq 5$ detik



Gambar 4.12 Sinyal Kontrol Saat $5 \leq t \leq 30$ detik



Gambar 4.13 Sinyal Kontrol Kompensasi dengan *Initial Condition* $x_2 = 0,2$ rad dan $x_4 = -0,5$ rad/detik Saat $0 \leq t \leq 10$ detik



Gambar 4.14 Sinyal Kontrol Kompensasi dengan *Initial Condition* $x_2 = 0,2$ rad dan $x_4 = -0,5$ rad/detik Saat $5 \leq t \leq 30$ detik

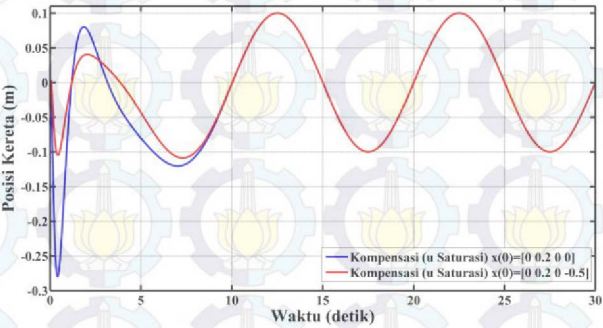
Sinyal kontrol saat *faulty* dan kompensasi ditunjukkan pada Gambar 4.11-4.14. Pada Gambar 4.11 dan Gambar 4.13 terlihat bahwa sinyal kontrol saat kompensasi mengalami *overshoot* dan *undershoot*. Besarnya nilai *overshoot* dan *undershoot* tergantung pada besarnya perbedaan *initial condition plant* dan *observer* bahwa semakin besar perbedaan *initial condition* dari *plant* dan *observer* maka semakin besar sinyal kontrol kompensasi yang dihasilkan oleh kontroler. Besarnya *overshoot* sinyal kontrol untuk kondisi awal posisi pendulum 0,2 rad dan kecepatan sudut -0,5 rad/detik adalah 1412 N, sedangkan untuk kondisi awal posisi pendulum 0,2 rad, sinyal kontrol mengalami *undershoot* sebesar -34,5 N. Karena sinyal kontrol kompensasi dengan FTC memiliki nilai hingga ribuan Newton maka sinyal kontrol dibatasi dengan nilai absolut sebesar

17,1 N. Sinyal kontrol yang telah dibatasi dan pengaruhnya pada respon posisi kereta serta posisi pendulum ditunjukkan pada Gambar 4.15 dan Gambar 4.16. Sementara nilai L_2 -Gain simulasi ditunjukkan pada Gambar 4.17. Nilai L_2 -Gain hasil simulasi masih berada di bawah level pelemahan $\gamma_{pmi_1} = 0,0024$ dan $\gamma_{pmi_2} = 0,0021$. Perbedaan nilai IAE *error tracking* dari posisi kereta terhadap sinyal referensi dapat dilihat pada Tabel 4.4:

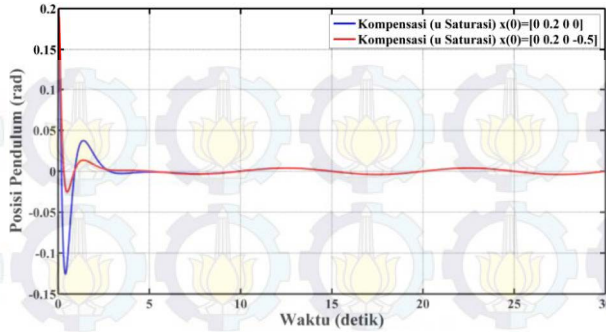
Tabel 4.4 Perbandingan IAE *Tracking* Sinyal Referensi

Initial Condition	IAE (m·detik)			
	Nominal	Faulty	Kompensasi	Kompensasi dengan Sinyal Kontrol Dibatasi
x_2 0,2 rad	0,5955	2,988	0,5985	0,6183
x_2 0,2 rad dan x_4 -0,5 rad/detik	0,3916	2,785	0,6165	0,4073

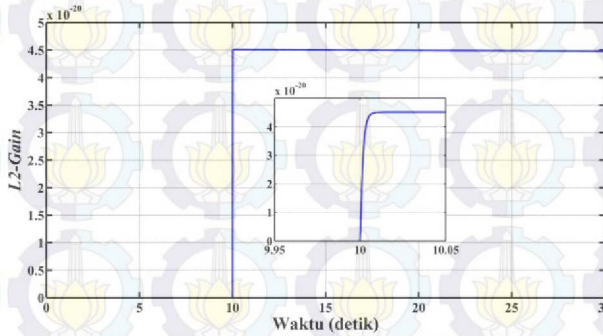
Secara keseluruhan, FTC hasil perancangan mampu mengembalikan performa sistem kembali ke kondisi nominal secara cepat walaupun terjadi kesalahan bias. Hal tersebut dibuktikan dengan nilai IAE hasil kompensasi mendekati nilai IAE pada kondisi nominal serta nilai L_2 -Gain yang masih berada di bawah level pelemahan γ_{pmi_1} dan γ_{pmi_2} .



Gambar 4.15 Respon Posisi Kereta dengan Sinyal Kontrol Dibatasi



Gambar 4.16 Respon Posisi Pendulum dengan Sinyal Kontrol Dibatasi



Gambar 4.17 L_2 -Gain Simulasi Saat Terjadi Kesalahan Bias

4.1.3 Pengujian *Loss of Sensitivity* ($0 \leq \alpha_i \leq 1$ dan $\beta_i = 0$)

Diasumsikan sensor posisi pendulum yang digunakan untuk mengukur posisi pendulum mengalami *loss of sensitivity* sebesar 30%, 40%, dan 50% untuk kondisi satu, kondisi dua, dan kondisi tiga. *Loss of sensitivity* tersebut terjadi pada detik ke-1. Penulisan *loss of sensitivity* untuk ketiga kondisi di atas dapat dituliskan dalam notasi matematika sebagai berikut:

$$x_{2f} = \alpha_2 x_2$$

Kondisi 1 $x_{2f} = \begin{cases} x_2 & ; \quad 0 \leq t < 1 \text{ detik} \\ 0,7x_2 & ; \quad t \geq 1 \text{ detik} \end{cases}$

Kondisi 2 $x_{2f} = \begin{cases} x_2 & ; \quad 0 \leq t < 1 \text{ detik} \\ 0,6x_2 & ; \quad t \geq 1 \text{ detik} \end{cases}$

Kondisi 3 $x_{2f} = \begin{cases} x_2 & ; \quad 0 \leq t < 1 \text{ detik} \\ 0,5x_2 & ; \quad t \geq 1 \text{ detik} \end{cases}$

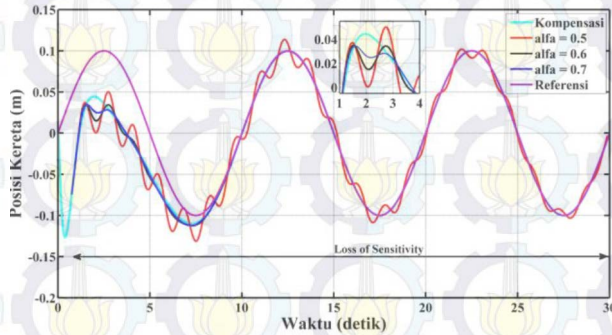
Berdasarkan (2.12) *loss of sensitivity* dapat dimodelkan menjadi *additive fault* yang dituliskan dengan:

$$\begin{aligned} f_{s_2} &= (\alpha_2 - 1)x_2 + \beta_2 \\ f_{s_2} &= (\alpha_2 - 1)x_2 \end{aligned}$$

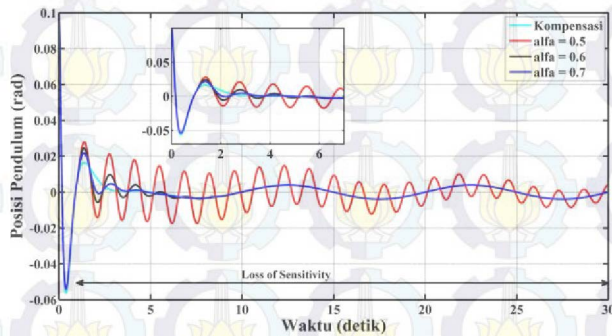
Pengujian *Loss of sensitivity* dilakukan dengan memberikan kondisi awal pada posisi pendulum sebesar 0,1 rad. Pengaruh *Loss of sensitivity* sensor posisi pendulum pada respon posisi kereta ditunjukkan pada Gambar 4.18. Dari gambar tersebut dapat dilihat bahwa semakin besar penurunan sensitivitas dari sensor posisi pendulum maka semakin besar penurunan performa *tracking* dari posisi kereta. Dengan penurunan sensitivitas sebesar 50% mengakibatkan posisi pendulum mengalami *ripple*. Nilai *ripple* paling besar yaitu 0,02068 m dan terjadi pada saat $t = 2,739$ detik, selang 1,739 detik dari terjadinya penurunan sensitivitas sensor. Besarnya *ripple* lama kelamaan berkurang seiring dengan bertambahnya waktu. Dengan waktu simulasi selama 30 detik, respon posisi kereta masih belum bisa kembali ke keadaan nominalnya. Begitu juga halnya dengan penurunan sensitivitas sebesar 40%, respon posisi kereta mengalami *ripple*, namun tidak sebesar saat penurunan sensitivitas 50%. Respon posisi kereta juga dapat kembali ke keadaan nominal dalam selang waktu 8,4 detik dari terjadinya penurunan sensitivitas. Berbeda halnya dengan penurunan sensitivitas 30%, respon posisi kereta mengalami *ripple* maksimum yang relatif kecil, yakni 0,00012 m dan hanya membutuhkan waktu 3,5 detik sejak terjadinya penurunan sensitivitas untuk kembali ke keadaan nominal. Perbandingan karakteristik respon posisi kereta saat *faulty* dan dengan kompensasi ditunjukkan pada Tabel 4.5.

Respon posisi pendulum dan sinyal kontrol diperlihatkan pada Gambar 4.19 dan Gambar 4.20. Respon posisi pendulum tanpa kompensasi juga mengalami *ripple* yang besarnya bergantung dari penurunan sensitivitas dari sensor, yakni semakin besar penurunan sensitivitas sensor maka semakin besar nilai *ripple*-nya dan juga semakin lama waktu yang dibutuhkan untuk kembali ke keadaan nominal. Sinyal kontrol kompensasi mengalami *undershoot* yang besarnya bergantung pada besar penurunan sensitivitas. Semakin besar penurunan sensitivitas, maka semakin besar nilai *undershoot*. Estimasi kesalahan sensor diperlihatkan pada Gambar 4.21. Sebagaimana tertera pada gambar tersebut bahwa *PMI Observer* mampu mengestimasi penurunan

sensitivitas yang dimodelkan menjadi *additive fault* dengan $f_{s_2} = (\alpha_2 - 1)x_2$. Nilai pelemahan L_2 -Gain ditunjukkan pada Gambar 4.22.



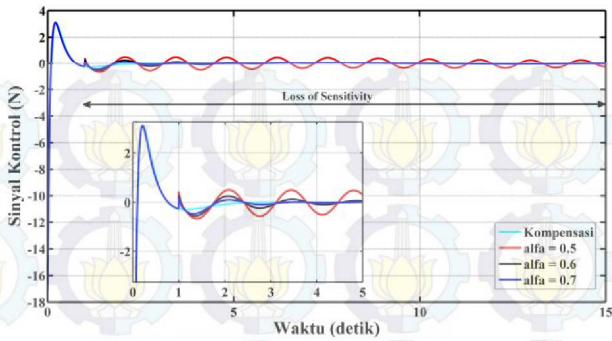
Gambar 4.18 Respon Posisi Kereta *Faulty* dan Kompensasi



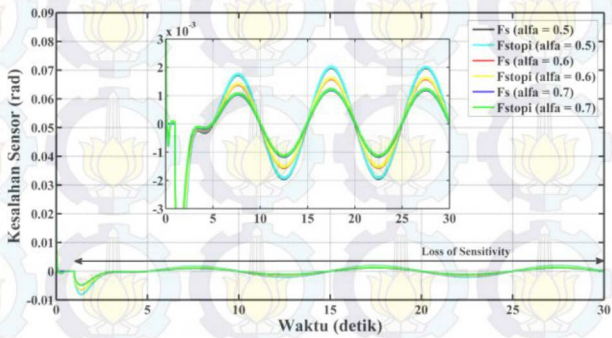
Gambar 4.19 Respon Posisi Pendulum *Faulty* dan Kompensasi

Tabel 4.5 Perbandingan Respon Posisi Kereta *Faulty* dan Kompensasi

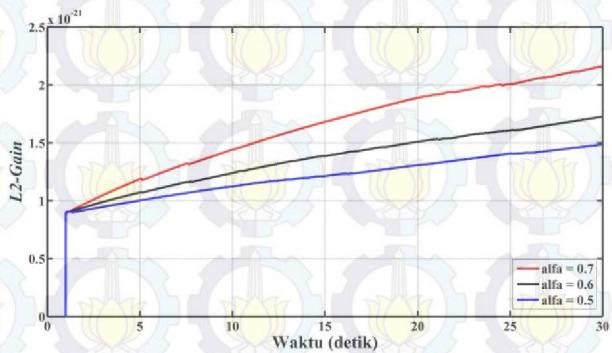
α_2	Tanpa Kompensasi			Dengan Kompensasi		
	Maks. <i>Ripple</i> (m)	Waktu untuk Kembali ke Nominal (detik)	IAE (m·detik)	<i>Ripple</i> Maks. (m)	Waktu untuk Kembali ke Nominal (detik)	IAE (m·detik)
0,5	0,0207	≥ 30	0,5935	≈ 0	≈ 0	0,4368
0,6	0,0062	8,4	0,4663	≈ 0	≈ 0	0,4368
0,7	0,0001	3,5	0,4583	≈ 0	≈ 0	0,4368



Gambar 4.20 Sinyal Kontrol *Faulty* dan Kompensasi



Gambar 4.21 Estimasi Kesalahan Sensor



Gambar 4.22 L_2 -Gain Saat Terjadi *Loss of Sensitivity*

Dari nilai IAE hasil kompensasi yang dibandingkan dengan IAE keadaan nominal, diperoleh selisih yang sangat kecil yakni sebesar 0.0028 m·detik. Oleh karena itu skenario FTC mampu menanggulangi pengaruh *loss of sensitivity* pada sensor posisi pendulum dan mampu mengembalikan performa sistem ke keadaan nominalnya.

4.1.4 Pengujian *Loss of Measurement* ($\alpha_i = 0$ dan $\beta_i = 0$)

Skenario pengujian *loss of measurement* dilakukan pada $5 \leq t \leq 7,5$ detik dan pada $15 \leq t \leq 17,5$ detik dengan kondisi awal posisi pendulum sebesar 0,1 rad. Secara matematis *loss of measurement* dapat dituliskan dengan:

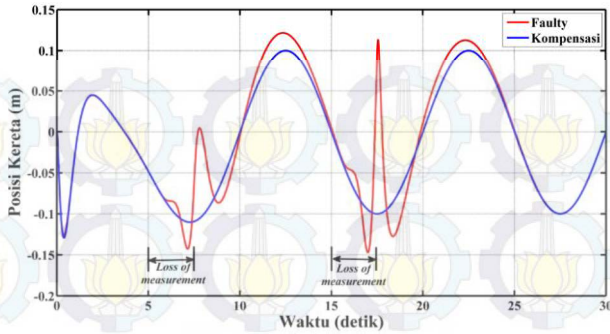
$$x_{2f} = 0 \text{ rad}$$

$$\alpha_2 = \begin{cases} 0 & ; \quad 5 \leq t \leq 7,5 \text{ detik dan } 15 \leq t \leq 17,5 \text{ detik} \\ 1 & ; \quad t \text{ lainnya} \end{cases}$$

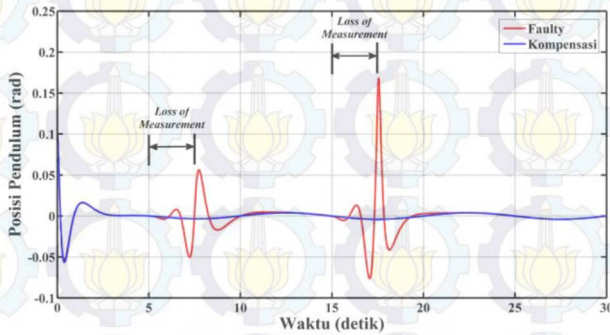
Pemodelan *loss of measurement* ke dalam *additive fault* adalah sebagai berikut:

$$f_{s2} = -x_2$$

Pada Gambar 4.23 terlihat bahwa akibat yang ditimbulkan *loss of measurement* selama 2,5 detik yakni pada detik $t = 5$ detik dan $t = 15$ detik mengakibatkan posisi kereta mengalami *undershoot* dan *overshoot*. Besarnya *undershoot* dan *overshoot* pada $t = 5$ detik adalah 0,046 m dan 0,104 m. Sedangkan besarnya *undershoot* dan *overshoot* pada $t = 15$ detik adalah 0,052 m dan 0,212 m. Respon posisi kereta dapat kembali ke performa nominal setelah 7,5 detik. Respon posisi pendulum akibat *loss of measurement* dapat dilihat pada Gambar 4.24. Dari gambar tersebut dapat dilihat bahwa respon posisi pendulum juga mengalami *undershoot* dan *overshoot*. Hal tersebut terjadi karena selama selang waktu 2,5 detik terjadi pengukuran sudut yang salah, sehingga mengakibatkan kontroler mengeluarkan sinyal kontrol yang salah juga. Pada Gambar 4.25 menunjukkan estimasi kesalahan sensor saat *loss of measurement*. Terlihat bahwa estimasi kesalahan memiliki nilai yang berkebalikan dengan nilai posisi pendulum.

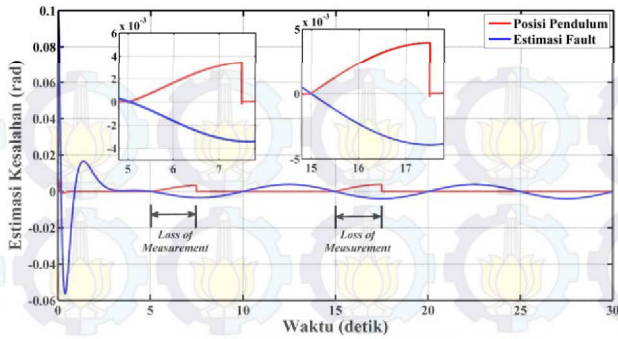


Gambar 4.23 Perbandingan Respon Posisi Kereta *Faulty* dengan Respon Posisi Kereta Kompensasi

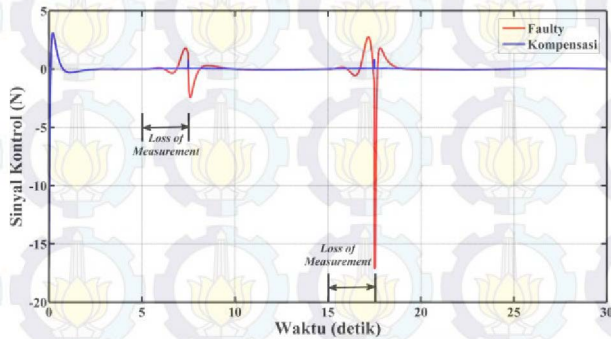


Gambar 4.24 Respon Posisi Pendulum Saat *Faulty* dan Kompensasi

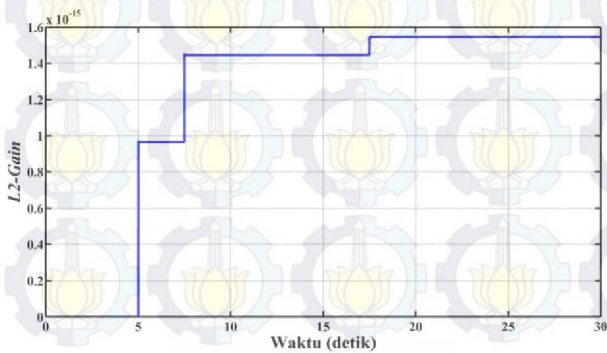
Gambar 4.26 menunjukkan sinyal kontrol *faulty* dan sinyal kontrol hasil kompensasi FTC. Sinyal kontrol hasil kompensasi memiliki respon yang hampir sama dengan sinyal kontrol nominal. Perbedaan yang cukup tampak hanya terjadi sedikit *overshoot* pada waktu $t = 5$ detik dan $t = 15$ detik. Besar nilai *overshoot* yakni 0,709 N pada $t = 5$ detik dan 0,036 N pada $t = 15$. Hal ini terjadi sebagai akibat *error* estimasi kesalahan selama pada selang waktu yang singkat, sehingga berpengaruh pada nilai sinyal kontrol yang dihasilkan oleh kontroler. Nilai L_2 -Gain pada Gambar 4.27 menunjukkan pelemahan turunan kedua sinyal terhadap *error* estimasi masih di bawah level pelemahan γ_{pmi_1} dan γ_{pmi_1} .



Gambar 4.25 Estimasi Kesalahan *Loss of Measurement*



Gambar 4.26 Perbandingan Sinyal Kontrol *Faulty* dan Sinyal Kontrol Kompensasi



Gambar 4.27 *L2-Gain* Saat Terjadi *Loss of Measurement*

Karakteristik performa sistem *faulty* dan dengan kompensasi diukur dengan IAE. Performa sistem dengan kompensasi menghasilkan nilai IAE sama dengan 0,437 m·detik. Nilai ini hanya berselisih 0,0025 m·detik dengan IAE saat kondisi nominal, sehingga FTC mampu mengembalikan performa sistem ke keadaan nominal walaupun saat terjadi *loss of measurement* pada sensor posisi pendulum. Karakteristik performa sistem *faulty* dan dengan kompensasi dirangkum ke dalam Tabel 4.6:

Tabel 4.6 Karakteristik Sistem *Faulty* dan Sistem Dengan Kompensasi

Kondisi Sensor	IAE (m·detik)	Sinyal Kontrol (N)		Posisi Kereta (m)		Posisi Pendulum (rad)	
		MO*	MU**	MO*	MU**	MO*	MU**
<i>Faulty</i> 1 ⁺	0,818	1,788	2,455	0,104	0,046	0,059	0,047
<i>Faulty</i> 2 ⁺⁺		2,683	17,158	0,212	0,052	0,072	0,172
Dengan Kompensasi 1 ⁺	0,437	0,709	0	≈ 0	≈ 0	≈ 0	≈ 0
Dengan Kompensasi 2 ⁺⁺		0,036	0	≈ 0	≈ 0	≈ 0	≈ 0

*MO = Maks. *Overshoot*, **MU = Maks. *Undershoot*
 +1 = keadaan saat $5 \leq t \leq 7,5$ detik; ++2 = keadaan saat $15 \leq t \leq 17,5$ detik

4.1.5 Pengujian *Stuck Sensor Reading* ($\alpha_i = 0$ dan $\beta_i \neq 0$)

Pengukuran posisi pendulum terkunci pada suatu nilai sebesar 0,05 rad mulai $t \geq 20$ detik. Berdasarkan definisi *stuck sensor reading* pada Subbab 2.1, maka dapat ditulis:

$$x_{2f} = \beta_2$$

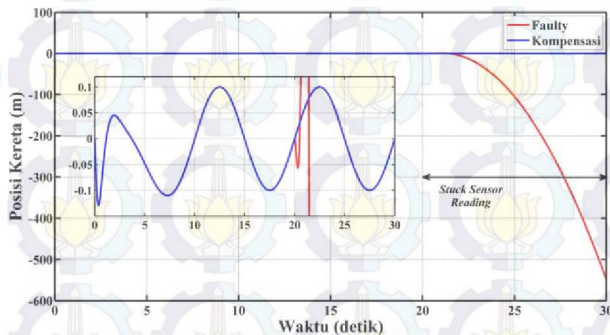
$$\beta_2 = \begin{cases} 0,05 \text{ rad} & ; t \geq 20 \text{ detik} \\ x_2 & ; t \text{ lainnya} \end{cases}$$

Penulisan *stuck sensor reading* dalam *additive fault* dapat ditulis sebagai berikut:

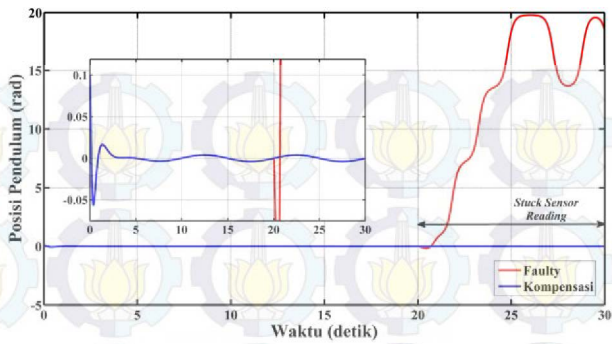
$$f_{s2} = -x_2 + \beta$$

Gambar 4.28-4.30 menunjukkan respon posisi kereta, posisi pendulum, dan sinyal kontrol *faulty*. Respon posisi kereta berubah menjadi tidak stabil sejak terjadinya *stuck sensor reading*. Sementara respon posisi pendulum terus naik dan akhirnya beresilasi pada nilai 16,92 rad. Dengan penambahan kompensasi FTC, respon posisi kereta dan respon posisi pendulum menjadi mirip dengan keadaan nominalnya. Nilai IAE respon posisi kereta hasil kompensasi didapatkan sama dengan 0,4368 m·detik. Nilai tersebut hanya memiliki selisih 0,0023 m·detik dengan IAE kondisi nominal. Hal ini menunjukkan bahwa skenario FTC mampu mengembalikan performa sistem ke keadaan nominalnya dengan waktu yang singkat.

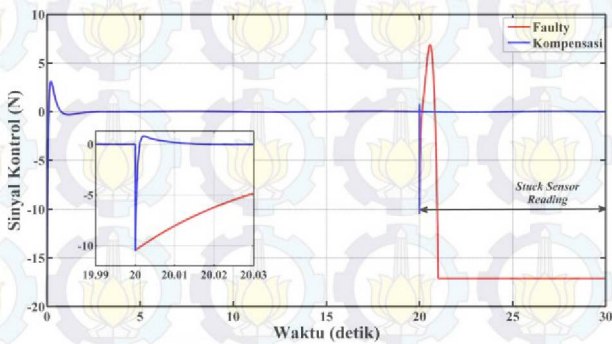
Sinyal kontrol kompensasi mengalami *undershoot* yang besarnya 10,5 N. *Undershoot* tersebut terjadi pada $t = 20$ detik dan dalam waktu yang singkat. Hal tersebut terjadi sebagai efek dari adanya *error* estimasi kesalahan. Hasil estimasi sinyal kesalahan tertera pada Gambar 4.31. Estimasi sinyal kesalahan mengalami *overshoot* dengan nilai 0,0034 rad selama selang waktu 0,02 detik. Secara keseluruhan estimasi sinyal kesalahan dapat dikatakan baik karena memiliki bentuk yang mirip dengan sinyal kesalahan asli dengan rumus $f_{s2} = -x_2 + \beta$. Hal tersebut dibuktikan dengan nilai IAE estimasi kesalahan sebesar 0,001532 rad·detik. Nilai $L2$ -Gain pada Gambar 4.32 masih berada di bawah level pelemahan γ_{pmi_1} dan γ_{pmi_1} , sehingga skenario FTC mampu mengatasi kesalahan *stuck sensor reading*.



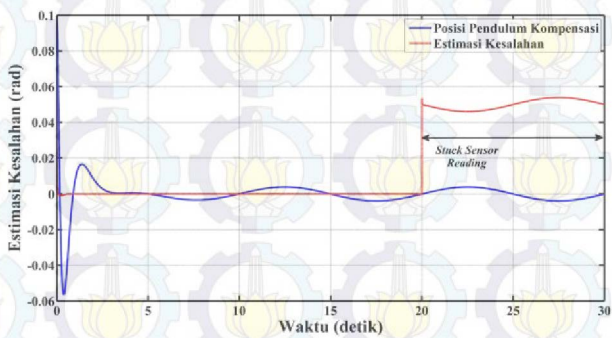
Gambar 4.28 Respon Posisi Kereta *Faulty* dan Kompensasi



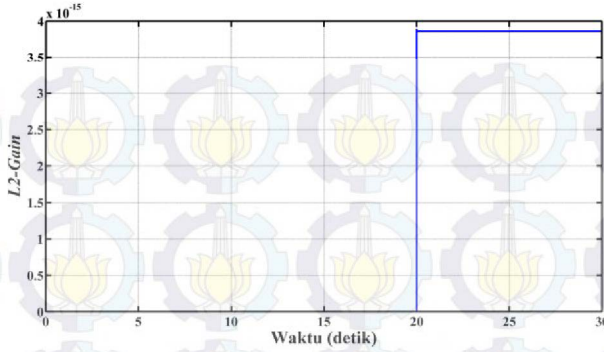
Gambar 4.29 Respon Posisi Pendulum *Faulty* dan Kompensasi



Gambar 4.30 Sinyal Kontrol *Faulty*



Gambar 4.31 Estimasi Kesalahan Sensor Saat *Stuck Sensor Reading*



Gambar 4.32 L_2 -Gain Simulasi Saat *Stuck Sensor Reading*

4.2 Hasil Implementasi

Sistem kontrol yang digunakan pada implementasi tidak persis sama dengan sistem kontrol pada simulasi. Perbedaan terletak pada nilai *gain observer*. Pada simulasi, *gain observer* hasil desain memiliki entri matriks dengan nilai sangat besar dengan orde hingga 10^5 dan beberapa entri lainnya memiliki nilai sangat kecil dengan orde 10^{-16} . Hal tersebut memicu terjadinya NaN (*Not a Number*) pada estimasi kesalahan saat implementasi. Parameter *observer* diubah sedemikian rupa hingga dapat memberikan estimasi kesalahan dengan *error* estimasi terkecil. Parameter *observer* yang diubah diantaranya adalah $\gamma_{obs} = 0,01$, $\theta_{obs} = 5^\circ$, dan ditambahkan satu LMI *region* yang membatasi nilai absolut bagian real dari *pole observer* yakni kurang dari 1. *Initial condition* yang diberikan pada *observer* yakni $\hat{\mathbf{x}}(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$. *Gain* dan *pole observer* untuk implementasi diperoleh sebagai berikut:

$$\tilde{\mathbf{L}}_1 = \begin{bmatrix} 0,6619 & -0,0000 & 1,0000 & 0,0000 \\ -0,0000 & -0,0000 & 0,0002 & 1,0122 \\ 0,0000 & -0,0000 & 0,6620 & 0,0079 \\ -0,0000 & -0,0000 & 0,0079 & 1,1309 \\ 0,0000 & 0,6010 & -0,0003 & -0,0177 \\ 0,0000 & 1,5962 & -0,0005 & -0,0315 \end{bmatrix}$$

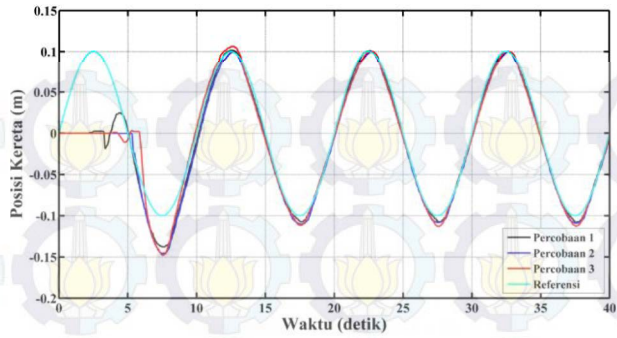
$$\bar{L}_2 = \begin{bmatrix} 0,6613 & -0,0000 & 1,0000 & 0,0000 \\ -0,0000 & -0,0000 & 0,0002 & 1,0129 \\ 0,0000 & -0,0000 & 0,6614 & 0,0071 \\ -0,0000 & -0,0002 & 0,0072 & 1,1262 \\ 0,0000 & 0,5960 & -0,0002 & -0,0102 \\ 0,0000 & 1,5903 & -0,0004 & -0,0242 \end{bmatrix}$$

$$pole_1 = \begin{bmatrix} -0,1953 \\ -0,6085 \\ -0,6618 \\ -0,6619 \\ -0,9436 \\ -0,9877 \end{bmatrix}; \quad pole_2 = \begin{bmatrix} -0,2000 \\ -0,6048 \\ -0,6613 \\ -0,6613 \\ -0,9342 \\ -0,9856 \end{bmatrix}$$

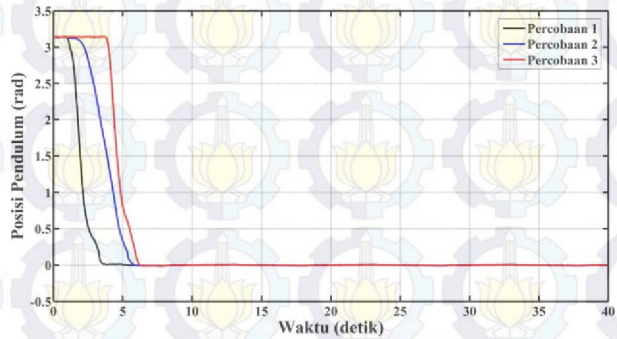
4.2.1 Keadaan Nominal

Implementasi dilakukan dengan mengayunkan batang pendulum hingga memasuki zona stabilisasinya. Respon posisi kereta saat tidak terjadi kesalahan sensor, ditunjukkan pada Gambar 4.33. Dari Gambar 4.33 dapat dilihat bahwa respon posisi kereta mampu mengikuti sinyal referensi lebih cepat daripada respon saat simulasi. Hal ini terjadi dikarenakan terdapat *initial condition* pada kecepatan pendulum yang arahnya berlawanan dengan arah jatuh pendulum sehingga posisi pendulum segera menuju posisi terbaliknya. Namun, respon posisi kereta masih mengalami *error tracking* pada saat mencapai puncak negatif dari kurva sinusoidal. Nilai IAE *tracking* respon posisi kereta pada percobaan 1, 2, dan 3 secara berturut-turut adalah 0,2788 m·detik; 0,3047 m·detik; dan 0,26380 m·detik. Nilai ini lebih kecil daripada nilai IAE saat simulasi, sehingga performa *tracking* posisi kereta masih dapat dikatakan baik.

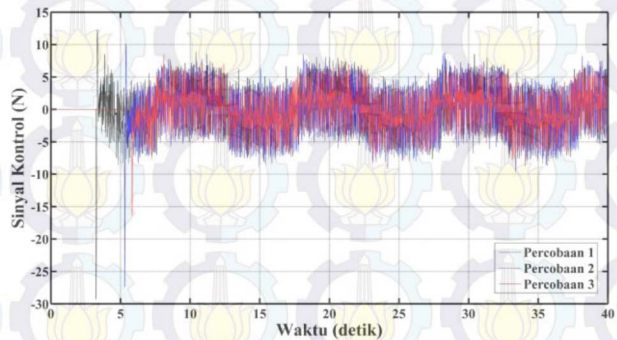
Respon posisi pendulum dan sinyal kontrol ditunjukkan pada Gambar 4.34-4.35. Dapat dilihat pada Gambar 4.34, respon posisi pendulum pada percobaan 1, 2, dan 3 secara berturut-turut mampu berada di sekitar 0 rad dalam waktu 0,512 detik; 0,488 detik; dan 0,371 detik sejak sinyal kontrol aktif, sehingga respon posisi pendulum dapat dikatakan baik. Sinyal kontrol saat awal memiliki nilai -29,3106 N; -27,4287 N; dan -16,3831 N pada percobaan 1, 2, dan 3, kemudian berosilasi di 0 N dengan amplitudo 5 N. Nilai sinyal kontrol ini tergolong kecil, sehingga batasan *gain* kontroler mampu mengurangi sinyal kontrol yang dihasilkan oleh kontroler. Keseluruhan karakteristik respon saat keadaan nominal dapat dirangkum ke dalam Tabel 4.7.



Gambar 4.33 Respon Posisi Kereta Saat Keadaan Nominal



Gambar 4.34 Respon Posisi Pendulum Saat Nominal

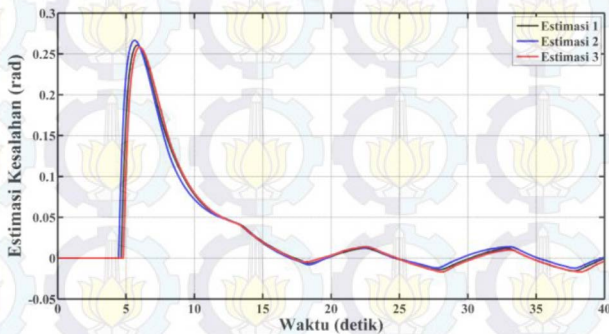


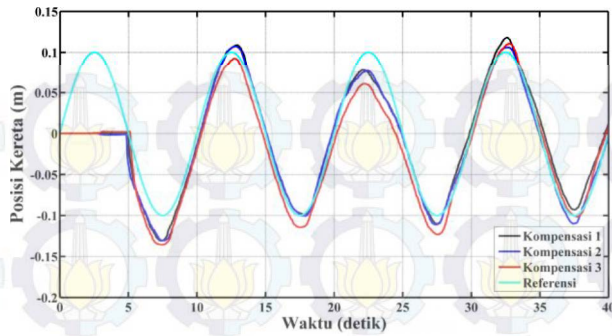
Gambar 4.35 Sinyal Kontrol Saat Keadaan Nominal

Tabel 4.7 Karakteristik Respon Sistem Saat Keadaan Nominal

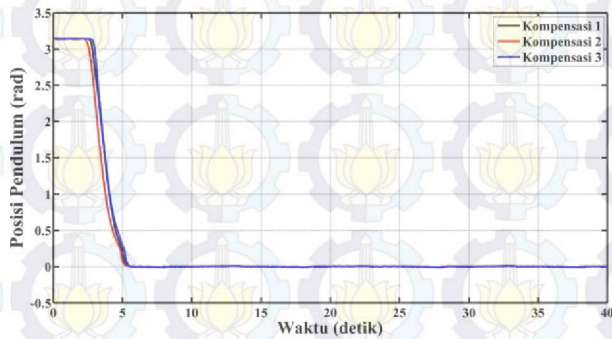
Percobaan ke- n	IAE <i>Tracking</i> (m·detik)	Waktu yang Dibutuhkan x_2 untuk Stabil (detik)	Sinyal Kontrol Maksimum (N)
Percobaan 1	0,2788	0,512	29,3106
Percobaan 2	0,3047	0,488	27,4287
Percobaan 3	0,2638	0,371	16,3831

Estimasi kesalahan saat keadaan nominal ditunjukkan pada Gambar 4.36. Dapat dilihat pada Gambar 4.36 bahwa estimasi kesalahan masih memiliki *error* estimasi baik saat awal implementasi (*transient*) maupun saat sudah *steady state* ($t \geq 20$ detik) dengan nilai IAE estimasi kesalahannya adalah 1,336 rad·detik; 1,340 rad·detik; dan 1,333 rad·detik pada percobaan 1, 2, dan 3. Hal ini terjadi dikarenakan *pole observer* hasil desain memiliki nilai absolut yang relatif kecil. Oleh karena itu, untuk menghindari performa respon sistem hasil kompensasi turun, maka kompensasi kesalahan dilakukan saat $t \geq 20$ detik. Respon posisi kereta, posisi pendulum dan sinyal kontrol secara berturut-turut ditunjukkan pada Gambar 4.37-4.39. Performa *tracking* posisi kereta terhadap sinyal referensi sedikit menurun dengan nilai IAE *tracking* pada percobaan 1, 2, dan 3 secara berturut-turut adalah 0,4291 m·detik; 0,3691 m·detik; dan 0,5718 m·detik. Namun, respon posisi pendulum dan sinyal kontrol masih memiliki karakteristik hampir sama dengan keadaan nominal. Karakteristik respon sistem dengan kompensasi dirangkum ke dalam Tabel 4.8.

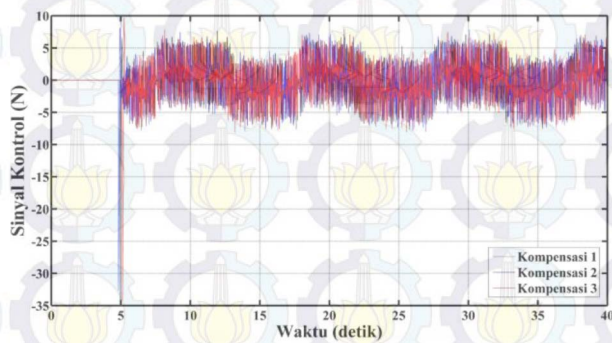
**Gambar 4.36** Estimasi Kesalahan Saat *Fault Free Case*



Gambar 4.37 Respon Posisi Kereta dengan Kompensasi



Gambar 4.38 Respon Posisi Pendulum dengan Kompensasi



Gambar 4.39 Sinyal Kontrol dengan Kompensasi

Tabel 4.8 Spesifikasi Respon Sistem Saat *Fault Free Case* dengan Kompensasi

Percobaan ke- <i>n</i>	IAE <i>Tracking</i> (m·detik)	IAE Estimasi Kesalahan Sensor (rad·detik)
Percobaan 1	0,4291	1,336
Percobaan 2	0,3691	1,340
Percobaan 3	0,5718	1,333

4.2.2 Pengujian *Bias Sensor Faults* ($\alpha_i = 1$ dan $\beta_i \neq 0$)

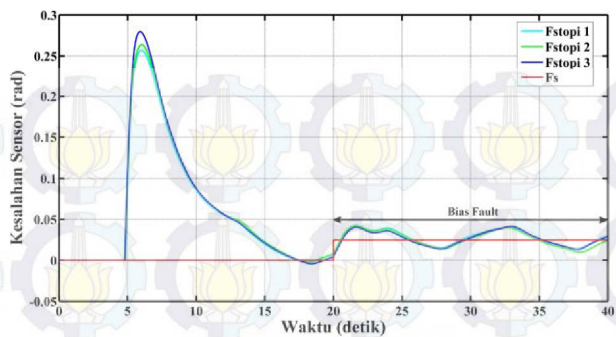
Skenario pengujian *bias sensor faults* pada implementasi terjadi pada waktu $t \geq 20$ detik dengan nilai 0,025 rad. Secara matematis, skenario tersebut dapat dituliskan dengan:

$$x_{2f} = x_2 + \beta_2$$

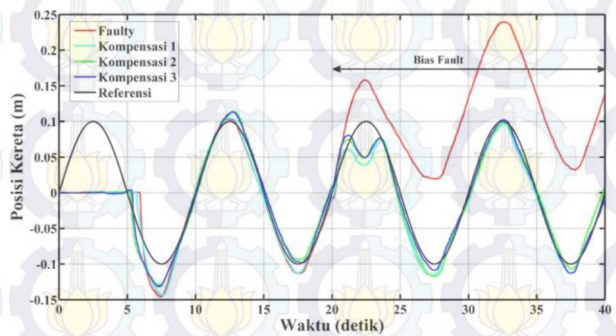
$$f_{s2} = \beta_2$$

$$\beta_2 = \begin{cases} 0 \text{ rad} & ; \quad t \text{ lainnya} \\ 0,025 \text{ rad} & ; \quad t \geq 20 \text{ detik} \end{cases}$$

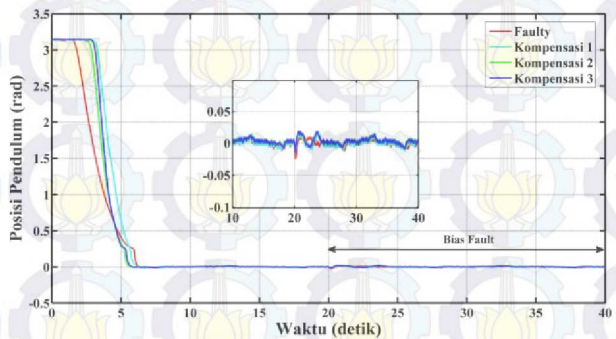
Estimasi kesalahan sensor ditunjukkan pada Gambar 4.40. Estimasi *bias fault* saat awal memiliki nilai *error* estimasi yang cukup besar yakni 0,252 rad. Kemudian, estimasi kesalahan berosilasi pada nilai 0,0275 rad dengan amplitudo 0,0136 rad. Hal ini terjadi karena *pole observer* saat implementasi memiliki nilai absolut *pole* yang kecil. Respon posisi kereta dan posisi pendulum secara berturut-turut ditunjukkan pada Gambar 4.41 dan Gambar 4.42. Respon posisi kereta *faulty* mengalami pergeseran *range* kerja, yakni berosilasi pada nilai 0,15 m dengan amplitudo 0,1 m. Nilai IAE *tracking* respon posisi kereta *faulty* adalah 1,28 m·detik sedangkan nilai IAE *tracking* dengan kompensasi pada percobaan 1, 2, dan 3 secara berturut-turut adalah 0,4074 m·detik; 0,4245 m·detik; dan 0,3339 m·detik. Hal ini menunjukkan bahwa respon posisi kereta mampu dikembalikan pada performa nominalnya, walaupun sedikit mengalami lonjakan pada lima detik pertama kompensasi. Respon posisi pendulum seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.42 juga mampu dikompensasi sehingga tetap berada pada sekitar 0 rad.



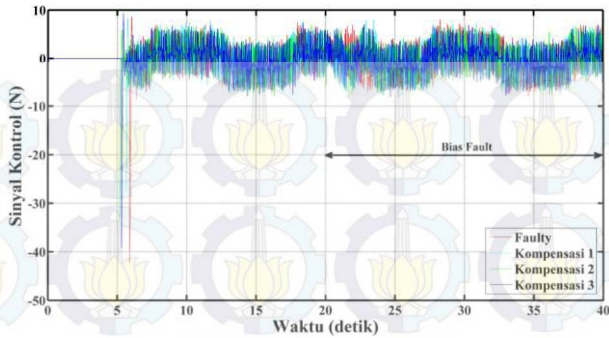
Gambar 4.40 Estimasi Bias fault



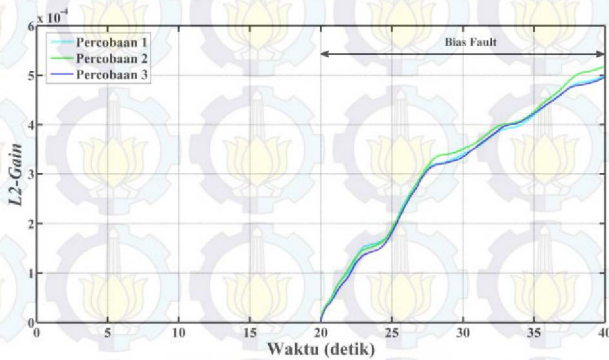
Gambar 4.41 Respon Posisi Kereta Faulty dan Kompensasi



Gambar 4.42 Respon Posisi Pendulum Saat Faulty dan Kompensasi



Gambar 4.43 Sinyal Kontrol *Faulty* dan Kompensasi



Gambar 4.44 L_2 -Gain Saat Terjadi *Bias Fault*

Sinyal kontrol dan L_2 -Gain ditunjukkan pada Gambar 4.43-4.44. Dari Gambar 4.43 dapat dilihat bahwa sinyal kontrol kompensasi sedikit mengalami lonjakan pada awal terjadi kesalahan, namun nilainya tidak begitu terlihat dikarenakan osilasi yang terjadi pada sinyal kontrol. Grafik L_2 -Gain pada Gambar 4.44 juga masih di bawah level pelemahan γ_{pm1} dan γ_{pm2} hasil desain dengan nilai maksimal adalah 0,0004991; 0,0005184; dan 0,0004963 pada percobaan 1, 2, dan 3, sehingga dapat disimpulkan skenario FTC mampu mengembalikan performa Sistem Pendulum Kereta kembali pada performa nominalnya walaupun terjadi *bias fault*. Keseluruhan spesifikasi respon sistem saat *bias fault* dirangkum pada Tabel 4.9:

Tabel 4.9 Spesifikasi Respon Sistem Saat Terjadi *Bias Fault*

Percobaan	IAE <i>Tracking</i> (m·detik)	Nilai Maksimum L_2 - <i>Gain</i>
<i>Faulty</i>	1,2800	-
Kompensasi 1	0,4074	0,0004991
Kompensasi 2	0,4245	0,0005184
Kompensasi 3	0,3339	0,0004963

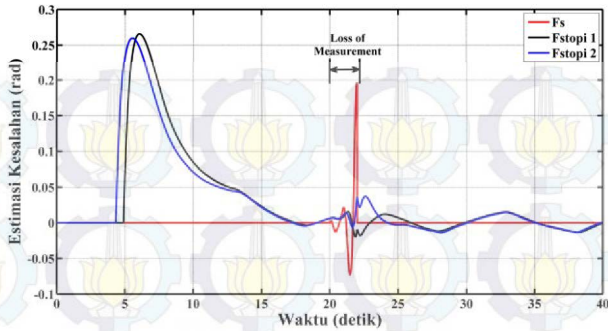
4.2.3 Pengujian *Loss of Measurement* ($\alpha_i = 0$ dan $\beta_i = 0$)

Skenario pengujian yang kedua adalah *loss of measurement*, diberikan selama 2 detik dan dimulai pada $t = 20$ detik. Secara matematis skenario *loss of measurement* dapat dituliskan dengan:

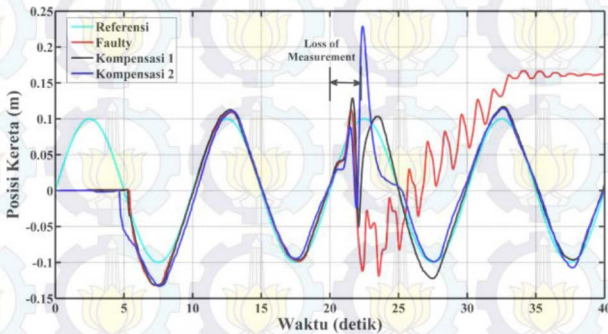
$$x_{2f} = \begin{cases} 0 \text{ rad} ; & 20 \leq t \leq 22 \text{ detik} \\ x_2 ; & t \text{ lainnya} \end{cases}$$

$$f_{s2} = \begin{cases} -x_2 ; & 20 \leq t \leq 22 \text{ detik} \\ 0 \text{ rad} ; & t \text{ lainnya} \end{cases}$$

Sama seperti estimasi *bias fault*, estimasi kesalahan *loss of measurement* yang ditunjukkan pada Gambar 4.45 memiliki nilai *error* estimasi yang besar pada awal implementasi dikarenakan perbedaan *initial condition* yang besar. *Observer* juga tidak dapat mengestimasi kesalahan yang berubah terlalu mendadak. Respon posisi kereta *faulty* menjadi tidak stabil karena batang pendulum tidak dapat bertahan di sekitar 0 rad dan kemudian jatuh. Hal ini sebagai akibat kesalahan yang muncul melebihi batas zona stabilisasi yang ditetapkan pada implementasi, yakni sebesar 0,25 rad. Respon posisi kereta pada Gambar 4.46 dengan kompensasi FTC mampu mengembalikan posisi kereta untuk mengikuti sinyal referensi dengan nilai IAE *tracking* adalah sebesar 0,4097 m·detik pada percobaan 1 dan 0,5886 m·detik pada percobaan 2, namun mengalami sedikit *overshoot* pada saat $t = 22,38$ detik. Hal ini terjadi akibat estimasi kesalahan sensor pada $20 \leq t \leq 25$ detik memiliki nilai *error* estimasi yang cukup besar.

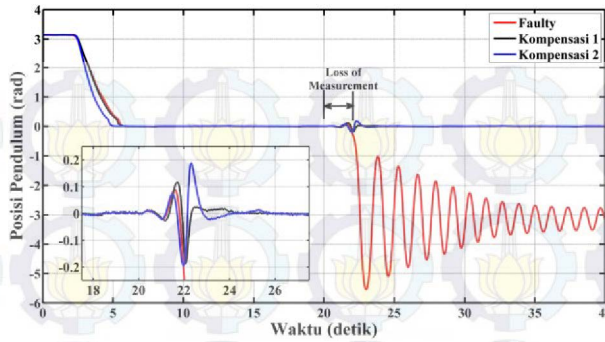


Gambar 4.45 Estimasi Kesalahan *Loss of Measurement*

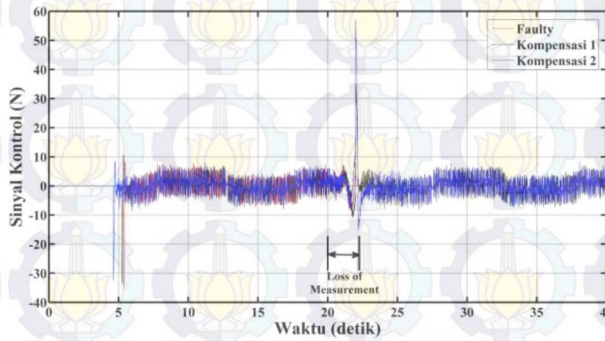


Gambar 4.46 Respon Posisi Kereta *Faulty* dan Kompensasi

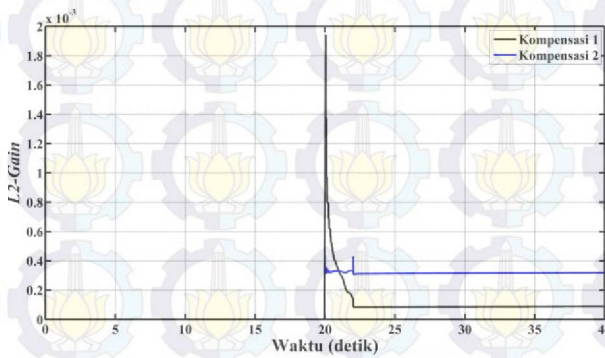
Sinyal kontrol *faulty* dan kompensasi ditunjukkan pada Gambar 4.48. Sinyal kontrol *faulty* bernilai 0 N saat batang pendulum keluar dari zona stabilnya yakni 0,25 rad. Sedangkan sinyal kontrol kompensasi mengalami lonjakan yang sangat besar dengan nilai 34,72 N dan 56,96 N pada percobaan 1 dan 2. Hal ini juga dikarenakan sempat terjadi *error* estimasi kesalahan yang sangat besar pada awal terjadinya kesalahan. Nilai L_2 -Gain saat terjadi *loss of measurement* ditunjukkan pada Gambar 4.49. Nilai tersebut juga masih berada di bawah level pelemahan γ_{pmi1} dan γ_{pmi2} dengan nilai maksimal adalah 0,0019410 pada percobaan 1 dan 0,0004368 pada percobaan 2. Secara keseluruhan skenario FTC yang diterapkan mampu mengembalikan performa *tracking* posisi kereta dari Sistem Pendulum Kereta walaupun terjadi kesalahan berupa *loss of measurement*. Keseluruhan spesifikasi respon dapat dilihat pada Tabel 4.10.



Gambar 4.47 Respon Posisi Pendulum *Faulty* dan Kompensasi



Gambar 4.48 Sinyal Kontrol *Faulty* dan Kompensasi



Gambar 4.49 L_2 -Gain Saat Terjadi *Loss of Measurement*

Tabel 4.10 Spesifikasi Respon Sistem Saat Terjadi *Loss of Measurement*

Percobaan	IAE <i>Tracking</i> (m·detik)	Lonjakan Sinyal Kontrol (N)	Nilai Maksimum L_2 -Gain
<i>Faulty</i>	-	-	-
Kompensasi 1	0,4097	34,72	0,0019410
Kompensasi 2	0,5886	56,96	0,0004368

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Kanev, S., "*Robust Fault-Tolerant Control*", FEBO-DRUK, Enschede, 2004.
- [2] Bouattour, M., Chadli, M., Hajjaji, A. A. dan Chaabane, M., " H_{∞} Sensor Faults Estimation for T-S Models using Descriptor Techniques: Application to Fault Diagnosis", *IEEE Fuzzy Systems*, pp. 251-255, 2009.
- [3] Gao, Z. dan Ding, S. X., "Sensor Fault Reconstruction and Sensor Compensation for a Class of Nonlinear State-space Systems via a Descriptor System Approach", *IET Control Theory Appl.*, vol. 3, pp. 578-585, 2007.
- [4] Shaker, M. S., "*Active Fault-Tolerant Control of Nonlinear Systems with Wind Turbine Application*", The University of Hull Press., Hull, 2012.
- [5] Ashfahani, A. dan Agustinah, T., "Desain Fuzzy Tracking Controller pada Pendulum Terbalik dengan Memperhitungkan Model Friksi", in *SITIA*, Surabaya, 2012.
- [6] _____, "*Control in a Matlab Environment (Matlab 6.5 Version)*", Feedback Instrument Ltd., England, 2004.
- [7] Ogata, K., "*Modern Control Engineering 3rd edition*", Prentice-Hall, New Jersey, 1997.
- [8] Passino, K. M. dan Yurkovich, S., "*Fuzzy Control*", Addison Wesley Longman, Inc., California, 1998.
- [9] Boyd, S. dan Ghaoui, L. E., "*Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*", SIAM, Philadelphia, 1994.
- [10] Zhou, K. dan Doyle, J. C., "*Essentials of Robust Control*", Prentice-Hall, Chinese, 1999.
- [11] Mahato, U., "*Low Gain Controller Design with Regional Pole Placement Constraints*", National Institute of Technology Rourkela Press., Odisha, 2013.



BAB 5

PENUTUP

Pada bab ini diuraikan mengenai kesimpulan berdasarkan penelitian yang telah dikerjakan dan saran mengenai hal-hal yang masih dapat dikembangkan lebih lanjut atau yang belum sempat dikerjakan.

5.1 Kesimpulan

Dari hasil pengujian simulasi dan implementasi pada Sistem Pendulum Kereta, dapat diambil beberapa kesimpulan sebagai berikut:

- Kontrol *tracking state feedback* dengan kompensator hasil perancangan mampu memaksa posisi kereta untuk mengikuti sinyal referensi dengan IAE sebesar 0,3047 m·detik.
- Kompensasi kesalahan sensor menggunakan *Proportional Multiple Integral Observer* (PMIO) mampu memperbaiki performa *tracking* posisi kereta saat terjadi *bias fault*. Hal tersebut dibuktikan dengan nilai IAE *tracking* tanpa kompensasi dan dengan kompensasi masing-masing sebesar 1,28 m·detik dan 0,3339 m·detik.
- Kompensasi kesalahan sensor menggunakan *Proportional Multiple Integral Observer* (PMIO) mampu memperbaiki performa *tracking* posisi kereta saat terjadi *loss of measurement*. Walaupun sistem tidak stabil saat tidak dikompensasi, namun hasil kompensasi mampu menjaga sistem tetap stabil dengan nilai IAE *tracking* sebesar 0,4097 m·detik.

5.2 Saran

Dalam Tugas Akhir ini, kesalahan sensor yang terletak pada sensor posisi kereta (*position encoder*) tidak dapat ditanggulangi pengaruhnya. Masalah ini disebabkan kesalahan sensor yang terjadi pada sensor posisi kereta tidak dapat memenuhi syarat *observable* dari *Proportional Multiple Integral Observer*. Oleh karena itu, untuk pengembangan penelitian selanjutnya, penulis menyarankan penggunaan skenario FTC yang mampu untuk mengestimasi kesalahan sensor posisi kereta sekaligus sensor posisi pendulum pada Sistem Pendulum Kereta.



LAMPIRAN A

A.1 Penurunan Model Matematika Sistem Pendulum Kereta

Model matematika Sistem Pendulum Kereta dapat diperoleh dengan analisis hukum Newton. Analisis dilakukan terhadap gerak translasi kereta dan gerak rotasi batang pendulum. Gaya-gaya yang bekerja saat gerak translasi pada sumbu x diantaranya adalah sinyal kontrol u dan gaya gesek T_c , sedangkan keseluruhan massa adalah penjumlahan antara massa kereta m_c dan massa pendulum m_p . Persamaan gerak translasi pada sumbu x dituliskan dengan:

$$\sum F_x = ma_x \quad (\text{A.1})$$

$$a_x = (x_1 - l \sin x_2) \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} u - T_c &= (m_c + m_p)(x_1 - l \sin x_2)'' \\ u - T_c &= (m_c + m_p)(x_1' - x_2' l \cos x_2)' \\ u - T_c &= (m_c + m_p)(x_1'' - x_2'' l \cos x_2 + (x_2')^2 l \sin x_2) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Pada sumbu y , gaya-gaya yang bekerja diantaranya adalah gaya normal sistem terhadap sumbu horizontal V dan gaya gravitasi, sehingga persamaan gerak translasi pada sumbu y dapat dituliskan dengan:

$$\sum F_y = ma_y \quad (\text{A.4})$$

$$a_y = (l \cos x_2)'' \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} V - (m_c + m_p)g &= (m_c + m_p)(l \cos x_2)'' \\ V &= (m_c + m_p)g + (m_c + m_p)(-lx_2' \sin x_2)' \\ V &= (m_c + m_p)g + (m_c + m_p)(-lx_2'' \sin x_2 - l(x_2')^2 \cos x_2) \\ V &= (m_c + m_p)(g - lx_2'' \sin x_2 - l(x_2')^2 \cos x_2) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Selanjutnya, persamaan gerak rotasi batang pendulum diperoleh dengan menganalisa torsi-torsi yang bekerja saat batang pendulum berotasi. Torsi-torsi yang bekerja diantaranya adalah torsi akibat u dan T_c serta

momen gesek akibat rotasi batang pendulum. Keseluruhan gerak rotasi dituliskan pada (A.7)

$$\sum \tau = J\alpha \quad (\text{A.7})$$

$$(u - T_c)l \cos x_2 + Vl \sin x_2 - D_p = Jx_2''$$

$$(u - T_c)l \cos x_2 + Vl \sin x_2 - f_p x_4 = Jx_2'' \quad (\text{A.8})$$

dengan melakukan substitusi (A.6) ke dalam (A.8) didapatkan (A.9) dan (A.10)

$$Jx_2'' = (u - T_c)l \cos x_2 - f_p x_4$$

$$+ (m_c + m_p)(g - lx_2'' \sin x_2 - l(x_2')^2 \cos x_2)l \sin x_2 \quad (\text{A.9})$$

$$Jx_4' = (u - T_c)l \cos x_2 - f_p x_4 + (m_c + m_p)l$$

$$(g \sin x_2 - lx_4' \sin^2 x_2 - l(x_4')^2 \cos x_2 \sin x_2)$$

$$Jx_4' = (u - T_c - \mu x_4'^2 \sin x_2)l \cos x_2 + \mu g \sin x_2$$

$$- \mu lx_4' \sin^2 x_2 - f_p x_4$$

$$x_4'(J + \mu l \sin^2 x_2) = (u - T_c - \mu x_4'^2 \sin x_2)l \cos x_2$$

$$+ \mu g \sin x_2 - f_p x_4$$

$$x_4' = \frac{(u - T_c - \mu x_4'^2 \sin x_2)l \cos x_2 + \mu g \sin x_2 - f_p x_4}{J + \mu l \sin^2 x_2} \quad (\text{A.10})$$

dengan $\mu = (m_c + m_p)l$

Substitusi (A.10) ke dalam (A.3)

$$u - T_c = (m_c + m_p)(x_3' - x_4' l \cos x_2 + x_4'^2 l \sin x_2)$$

$$(m_c + m_p)x_3' = u - T_c + \mu x_4' \cos x_2 - \mu x_4'^2 \sin x_2$$

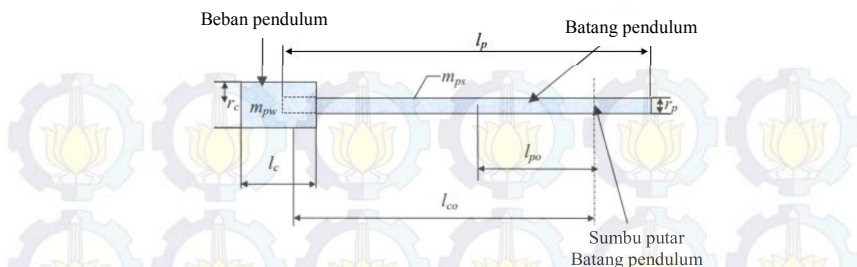
$$(m_c + m_p)x_3' = u - T_c - \mu x_4'^2 \sin x_2$$

$$+ \frac{\mu l \cos^2 x_2 (u - T_c - \mu x_4'^2 \sin x_2)}{J + \mu l \sin^2 x_2} + \frac{\mu \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{J + \mu l \sin^2 x_2}$$

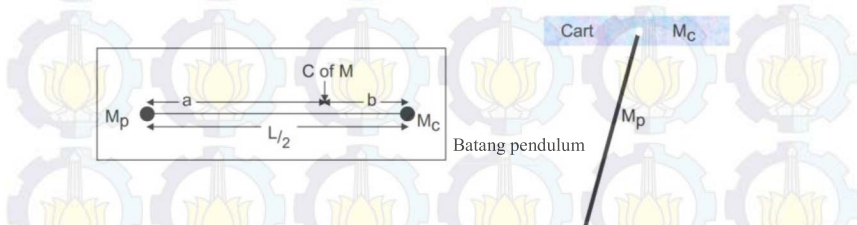
$$\begin{aligned}
(m_c + m_p)x_3' &= \frac{(J + \mu l \sin^2 x_2)(u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2)}{J + \mu l \sin^2 x_2} \\
&+ \frac{\mu l \cos^2 x_2 (u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2)}{J + \mu l \sin^2 x_2} + \frac{\mu \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{J + \mu l \sin^2 x_2} \\
(m_c + m_p)x_3' &= \frac{(J + \mu l)(u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2)}{J + \mu l \sin^2 x_2} \\
&+ \frac{\mu \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{J + \mu l \sin^2 x_2} \\
x_3' &= \frac{(J + \mu l)l}{(m_c + m_p)l} \frac{(u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2)}{J + \mu l \sin^2 x_2} \\
&+ \frac{\mu l \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{(m_c + m_p)l(J + \mu l \sin^2 x_2)} \\
x_3' &= \left(l^2 + \frac{J}{(m_c + m_p)} \right) \frac{(u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2)}{J + \mu l \sin^2 x_2} \\
&+ \frac{l \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{(J + \mu l \sin^2 x_2)} \\
x_3' &= \frac{a(u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2) + l \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{J + \mu l \sin^2 x_2} \quad (A.11)
\end{aligned}$$

dengan $a = l^2 + \frac{J}{(m_c + m_p)}$

Momen inersia dari Sistem Pendulum Kereta diperoleh dengan menganalisis pusat massa yang ada pada pendulum seperti yang diilustrasikan pada Gambar A.1 dengan m_{pw} adalah massa beban pendulum (kg), m_{ps} adalah massa batang pendulum (kg), l_p adalah panjang batang pendulum (m), l_{p0} adalah jarak antara titik pusat massa beban pendulum dengan sumbu putar batang pendulum (m), r_p adalah jari-jari batang pendulum (m), dan r_c adalah jari-jari batang pendulum (m). Momen inersia pendulum terhadap sumbu rotasi ditunjukkan pada Gambar A.1.



Gambar A.1 Ilustrasi Pendulum [6]



Gambar A.2 Ilustrasi Momen Inersia Sistem Pendulum Kereta [6]

Momen inersia pendulum yang berhubungan dengan sumbu putar pendulum adalah

$$J_p = m_{pw} \left(\frac{1}{12} l_c^2 + \frac{1}{4} r_c^2 + l_{co}^2 \right) + m_{ps} \left(\frac{1}{12} l_p^2 + \frac{1}{4} r_p^2 + l_{po}^2 \right) \quad (A.12)$$

Untuk memudahkan perhitungan, batang pendulum diasumsikan sebagai silinder dengan ketebalan seragam dengan panjang L serta massa m_p . Sumbu putar berada pada pusat massa kereta dan pada salah satu ujung dari pendulum sehingga kereta dapat dipandang sebagai titik massa M_c dan pendulum sebagai titik massa M_p . Pusat massa Sistem Pendulum Kereta berada di sekitar titik massa M_c , seperti yang digambarkan pada Gambar A.2. Apabila momen inersia pada pusat massa Sistem Pendulum Kereta adalah J , maka untuk menghitung momen inersia J_p yang berada di titik yang berjarak d dari pusat massa sistem dapat digunakan rumus berikut

$$J_p = J + Md^2 \quad (\text{A.13})$$

Titik pusat massa sistem dapat dirumuskan sebagai berikut

$$M_p a = M_c b \quad (\text{A.14})$$

dengan $a + b = L/2$. Oleh karena itu berdasarkan (A.13) dan (A.14) didapatkan momen inersia terhadap pusat massa Sistem Pendulum Kereta

$$J = M_p a^2 + M_c b^2 + \frac{M_p}{12} L^2 \quad (\text{A.15})$$

dengan nilai a dan b adalah

$$a = \frac{LM_c}{2(M_p + M_c)} \text{ dan } b = \frac{LM_p}{2(M_p + M_c)} \quad (\text{A.16})$$

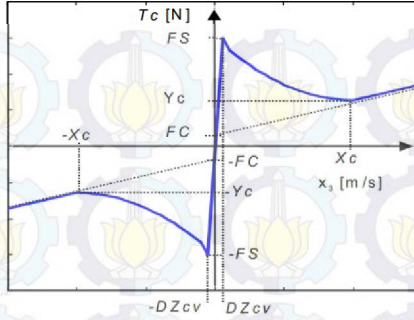
Dengan memasukkan (A.16) ke dalam (A.15) didapatkan persamaan momen inersia sistem secara lengkap

$$J = \frac{L^2 m_p (4m_c + m_p)}{12(m_c + m_p)} \quad (\text{A.17})$$

sedangkan jarak pusat massa Sistem Pendulum Kereta terhadap sumbu putar adalah

$$l = \frac{m_p L}{2(m_c + m_p)} \quad (\text{A.18})$$

Saat kereta mulai akan bergerak, gaya gesek yang mempengaruhi adalah gaya gesek statis (*static friction*), sedangkan kereta yang sudah bergerak dipengaruhi oleh gaya gesek dinamis (*dynamic friction*). Oleh karena itu, gaya gesek yang bekerja pada Sistem Pendulum Kereta dipengaruhi oleh kecepatan kereta x_3 dan bersifat nonlinear. Gaya gesek tersebut diilustrasikan pada Gambar A.3.



Gambar A.3 Gaya Gesek T_c Terhadap Kecepatan Kereta x_3 [6]

Dari Gambar A.3, F_s adalah gaya gesek statis (*static friction*), F_c adalah gaya gesek dinamis (*coulomb friction*), x_c adalah kecepatan kereta saat gaya gesek memasuki daerah linear, Y_c adalah gaya gesek pada titik x_c , dan DZ_{cv} adalah *dead-zone* untuk kecepatan kereta. Berdasarkan Gambar A.3, gaya gesek dibagi menjadi lima daerah yaitu daerah 1 untuk $x_3 < -x_c$, daerah 2 untuk $-x_c \leq x_3 < -DZ_{cv}$, daerah 3 untuk $-DZ_{cv} \leq x_3 \leq DZ_{cv}$, daerah 4 gaya gesek untuk $DZ_{cv} < x_3 \leq x_c$, dan daerah 5 untuk $x_c < x_3$. Persamaan gaya gesek tersebut dapat dituliskan sebagai berikut:

$$T_c(x_3) = \begin{cases} \frac{(Y_c - F_c)x_3}{x_c} - F_c, & x_3 < -x_c \\ \frac{(Y_c - F_s)x_3^2}{x_c^2} - 2\frac{(F_s - Y_c)x_3}{x_c} - F_s, & -x_c \leq x_3 < -DZ_{cv} \\ T_c(x_3) = \frac{F_s}{DZ_{cv}}x_3, & -DZ_{cv} \leq x_3 \leq DZ_{cv} \\ \frac{(F_s - Y_c)x_3^2}{x_c^2} - 2\frac{(F_s - Y_c)x_3}{x_c} + F_s, & DZ_{cv} < x_3 \leq x_c \\ \frac{(Y_c - F_c)x_3}{x_c} + F_c, & x_c < x_3 \end{cases} \quad (A.19)$$

Terakhir, keseluruhan parameter pada Sistem Pendulum Kereta dituliskan pada Tabel A.1.

Tabel A.1 Parameter-Parameter Sistem Pendulum Kereta [6]

Parameter	Simbol	Nilai
Massa kereta (kg)	m_c	1,12
Massa beban pendulum (kg)	m_{pw}	0,095
Massa batang pendulum (kg)	m_{ps}	0,025
Panjang rel (m)	R_l	1
Panjang batang pendulum (m)	l_p	0,402
Jarak pusat massa batang ke sumbu putar (m)	l_{p0}	0,146
Panjang beban (m)	l_c	0,041
Jarak pusat massa beban ke sumbu putar (m)	l_{c0}	0,347
Jari-jari beban pendulum (m)	r_c	0,02
Jari-jari batang pendulum (m)	r_p	0,006
Gaya gesek statis (N)	F_s	2,5316
Gaya gesek dinamis (<i>Coulomb</i>) (N)	F_c	2,2813
Gaya kontrol maksimal (N)	u_{max}	17,5
Gaya kontrol minimal (N)	DZ_u	1,3792
Kecepatan minimal kereta (m/s)	DZ_{cv}	0,008
Kecepatan ayun minimal pendulum (rad/s)	DZ_{pv}	0,034
Gaya gesek pendulum (N)	f_p	0,0001
Momen inersia pendulum (kg.m ²)	J_p	0,0139
Momen inersia sistem (kg.m ²)	J	0,0136
Jarak sumbu rotasi ke pusat massa sistem (m)	l	0,0168
Kec. Kereta awal daerah 5 gaya gesek (m/s)	x_c	0,3955
Gaya gesek saat kecepatan kereta	Y_c	2,3815
Tegangan kontrol maksimal (Volt)	V_m	2,5

A.2 Elemen Matriks Linearisasi Model Sistem Pendulum Kereta

Matriks Jacobi dari Sistem Pendulum Kereta dapat dicari dengan memasukkan $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ seperti yang tertera pada (3.1) dan $\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = x_1$ ke dalam (2.19)-(2.22). Matriks Jacobi tersebut dituliskan sebagai berikut:

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)}{\partial \mathbf{x}} \bigg|_{\mathbf{x}^*, u^*} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, u)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, u)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, u)}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, u)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, u)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, u)}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_3(\mathbf{x}, u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3(\mathbf{x}, u)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3(\mathbf{x}, u)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3(\mathbf{x}, u)}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_4(\mathbf{x}, u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4(\mathbf{x}, u)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4(\mathbf{x}, u)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4(\mathbf{x}, u)}{\partial x_4} \end{bmatrix} \bigg|_{\mathbf{x}^*, u^*}$$

Elemen matriks \mathbf{A} dapat dituliskan dengan

$$f_1(\mathbf{x}, u) = x_3$$

$$\frac{\partial f_1(\mathbf{x}, u)}{\partial x_1} = 0 \quad \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, u)}{\partial x_2} = 0 \quad \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, u)}{\partial x_3} = 1 \quad \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, u)}{\partial x_4} = 0$$

$$f_2(\mathbf{x}, u) = x_4$$

$$\frac{\partial f_2(\mathbf{x}, u)}{\partial x_1} = 0 \quad \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, u)}{\partial x_2} = 0 \quad \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, u)}{\partial x_3} = 0 \quad \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, u)}{\partial x_4} = 1$$

$$f_3(\mathbf{x}, u) = \frac{a(u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2) + l \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{J + \mu l \sin^2 x_2}$$

$$\frac{\partial f_3(\mathbf{x}, u)}{\partial x_1} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_3(\mathbf{x}, u)}{\partial x_2} &= \frac{(-a\mu x_4^2 \cos x_2 + \mu g l \cos 2x_2 + f_p l x_4 \sin x_2)(J + \mu l \sin^2 x_2)}{(J + \mu l \sin^2 x_2)^2} \\ &= \frac{(a(u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2) + l \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4))(\mu l \sin 2x_2)}{(J + \mu l \sin^2 x_2)^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_3(\mathbf{x}, u)}{\partial x_3} = -\frac{a}{J + \mu l \sin^2 x_2} \frac{\partial T_c}{\partial x_3}$$

$$\frac{\partial f_3(\mathbf{x}, u)}{\partial x_4} = \frac{-2a\mu x_4 \sin x_2 - f_p l \cos x_2}{J + \mu l \sin^2 x_2}$$

$$f_4(\mathbf{x}, u) = \frac{l \cos x_2 (u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2) + \mu g \sin x_2 - f_p x_4}{J + \mu l \sin^2 x_2}$$

$$\frac{\partial f_4(\mathbf{x}, u)}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial f_4(\mathbf{x}, u)}{\partial x_2} = \frac{(l \sin x_2 (T_c - u) - \mu l x_4^2 \cos 2x_2)(J + \mu l \sin^2 x_2)}{(J + \mu l \sin^2 x_2)^2}$$

$$= \frac{(l \cos x_2 (u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2) + \mu g \sin x_2 - f_p x_4)(\mu l \sin 2x_2)}{(J + \mu l \sin^2 x_2)^2}$$

$$\frac{\partial f_4(\mathbf{x}, u)}{\partial x_3} = \frac{l \cos x_2}{J + \mu l \sin^2 x_2} \frac{\partial T_c}{\partial x_3}$$

$$\frac{\partial f_4(\mathbf{x}, u)}{\partial x_4} = \frac{-2\mu l x_4 \sin x_2 \cos x_2 - f_p}{J + \mu l \sin^2 x_2}$$

dengan komponen $\partial T_c / \partial x_3$ adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial T_c(x_3)}{\partial x_3} = \begin{cases} (Y_c - F_c)/x_c, & x_3 < -x_c \\ (Y_c - F_s)[(2x_3/x_c^2) + 2/x_c], & -x_c \leq x_3 < -DZ_{cv} \\ F_s/DZ_{cv}, & -DZ_{cv} \leq x_3 < 0 \\ 0, & x_3 = 0 \\ F_s/DZ_{cv}, & 0 < x_3 \leq DZ_{cv} \\ (F_s - Y_c)[(2x_3/x_c^2) - 2/x_c], & DZ_{cv} < x_3 \leq x_c \\ (Y_c - F_c)/x_c, & x_c < x_3 \end{cases}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)}{\partial u} \bigg|_{\mathbf{x}^*, u^*} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, u)}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, u)}{\partial u} \\ \frac{\partial f_3(\mathbf{x}, u)}{\partial u} \\ \frac{\partial f_4(\mathbf{x}, u)}{\partial u} \end{bmatrix} \bigg|_{\mathbf{x}^*, u^*}$$

Selanjutnya, elemen matriks \mathbf{B} dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}, u) &= x_3 \\ \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, u)}{\partial u} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(\mathbf{x}, u) &= x_4 \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, u)}{\partial u} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_3(\mathbf{x}, u) &= \frac{a(u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2) + l \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{J + \mu l \sin^2 x_2} \\ \frac{\partial f_3(\mathbf{x}, u)}{\partial u} &= \frac{a}{J + \mu l \sin^2 x_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_4(\mathbf{x}, u) &= \frac{l \cos x_2 (u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2) + \mu g \sin x_2 - f_p x_4}{J + \mu l \sin^2 x_2} \\ \frac{\partial f_4(\mathbf{x}, u)}{\partial u} &= \frac{l \cos x_2}{J + \mu l \sin^2 x_2} \end{aligned}$$

Dengan fungsi aljabar keluaran sistem adalah $h(\mathbf{x}, u) = x_1$, didapatkan matriks \mathbf{C}_t dan D

$$\mathbf{C}_t = \begin{bmatrix} \frac{\partial h(\mathbf{x}, u)}{\partial x_1} & \frac{\partial h(\mathbf{x}, u)}{\partial x_2} & \frac{\partial h(\mathbf{x}, u)}{\partial x_3} & \frac{\partial h(\mathbf{x}, u)}{\partial x_4} \end{bmatrix} \quad D = \frac{\partial h(\mathbf{x}, u)}{\partial u}$$

dengan elemen matriks \mathbf{C}_t dan D adalah sebagai berikut

$$\frac{\partial h(\mathbf{x}, u)}{\partial x_1} = 1 \quad \frac{\partial h(\mathbf{x}, u)}{\partial x_2} = 0 \quad \frac{\partial h(\mathbf{x}, u)}{\partial x_3} = 0 \quad \frac{\partial h(\mathbf{x}, u)}{\partial x_4} = 0$$

$$\frac{\partial h(\mathbf{x}, u)}{\partial u} = 0$$

Sehingga matriks \mathbf{C}_t dan D adalah

$$\mathbf{C}_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = 0$$



Halaman ini sengaja dikosongkan

LAMPIRAN B

B.1 Program Perhitungan *Gain* Kontroler dan *Observer*

```
clc
clear

% Model Plant
[A1,B1,C1,D1] = linmod('inv_p',[0 0 0 0],0);
[A2,B2,C2,D2] = linmod('inv_p',[0 0.25 0 0],0);

C = eye(4);
Df = [0 1 0 0]';

% cek rank
rank1 = rank([A1 zeros(4,1);C Df]);
rank2 = rank([A2 zeros(4,1);C Df]);

rank_n1 = rank([eye(4)-A1;C]);
rank_n2 = rank([eye(4)-A2;C]);

% Model Kompensator
A = 0.1
f = 0.1
Ac = [0 1;-(2*pi*f)^2 0]
Bc = [0;A*2*pi*f]

% Matriks augmentasi kontroler
A1hat = [A1 zeros(4,2);-Bc*[1 0 0 0] Ac]
A2hat = [A2 zeros(4,2);-Bc*[1 0 0 0] Ac]

B1hat = [B1;0;0]
B2hat = [B2;0;0]

% Matriks augmentasi observer
A1bar = [A1 zeros(4,2);zeros(2,4) [0 0 ;1 0]];
A2bar = [A2 zeros(4,2);zeros(2,4) [0 0 ;1 0]];

B1bar = [B1;0;0];
```



```

B2bar = [B2;0;0];

Cbar = [C zeros(4,1) Df];
G = [0 0 0 0 1 0]';

Cp = 0.435*eye(6);
alfa = 250;
sin_obs = sin(30*pi/180);
cos_obs = cos(30*pi/180);

%% PMIO T-S FTC

% Observer 1
setlmis([])

p1 = lmivar(1,[6 1])
h1 = lmivar(2,[6 4])
gamma1 = lmivar(1,[1 1])

lmiterm([1 1 1 p1],-1,1)

lmiterm([2 1 1 p1],1,A1bar,'s')
lmiterm([2 1 1 h1],-1,Cbar,'s')
lmiterm([2 2 1 p1],G',1)
lmiterm([2 3 1 0],Cp)
lmiterm([2 2 2 gamma1],-1,1)
lmiterm([2 3 3 gamma1],-1,1)
%lmiterm([2 2 2 0],-gamma)
%lmiterm([2 3 3 0],-gamma)

% LMI pole region
lmiterm([3 1 1 p1],1,A1bar,'s')
lmiterm([3 1 1 h1],-1,Cbar,'s')
lmiterm([3 1 1 p1],2*alfa,1)

lmiterm([4 1 1 p1],sin_obs,A1bar,'s')
lmiterm([4 1 1 h1],-sin_obs,Cbar,'s')
lmiterm([4 1 2 p1],-cos_obs*A1bar',1)

```

```

lmiterm([4 1 2 p1],cos_obs,Albar)
lmiterm([4 1 2 -h1],cos_obs*Cbar',1)
lmiterm([4 1 2 h1],-cos_obs,Cbar)
lmiterm([4 2 2 p1],sin_obs,Albar,'s')
lmiterm([4 2 2 h1],-sin_obs,Cbar,'s')

lmiterm([-5 1 1 p1],1,Albar,'s')
lmiterm([-5 1 1 h1],-1,Cbar,'s')
lmiterm([-5 1 1 p1],2*100,1)

lmisys1 = getlmis

c1 = mat2dec(lmisys1,zeros(6),zeros(6,4),1)
options1 = [100 0 0 0 0]

[copt1 xopt1] = mincx(lmisys1,c1,options1)
% [copt1 xopt1] = feasp(lmisys1)

P1 = dec2mat(lmisys1,xopt1,p1)
H1 = dec2mat(lmisys1,xopt1,h1)
Gamma1 = dec2mat(lmisys1,xopt1,gamma1)

L1 = inv(P1)*H1
pole_observer1 = eig(Albar-L1*Cbar)

% Observer 2
setlmis([])

p2 = lmivar(1,[6 1])
h2 = lmivar(2,[6 4])
gamma2 = lmivar(1,[1 1])

lmiterm([1 1 1 p1],-1,1)

lmiterm([2 1 1 p1],1,A2bar,'s')
lmiterm([2 1 1 h2],-1,Cbar,'s')
lmiterm([2 2 1 p2],G',1)
lmiterm([2 3 1 0],Cp)

```

```

lmiterm([2 2 2 gamma2],-1,1)
lmiterm([2 3 3 gamma2],-1,1)

% LMI pole region
lmiterm([3 1 1 p2],1,A2bar,'s')
lmiterm([3 1 1 h2],-1,Cbar,'s')
lmiterm([3 1 1 p2],2*alfa,1)

lmiterm([4 1 1 p2],sin_obs,A2bar,'s')
lmiterm([4 1 1 h2],-sin_obs,Cbar,'s')
lmiterm([4 1 2 p2],-cos_obs*A2bar',1)
lmiterm([4 1 2 p2],cos_obs,A2bar)
lmiterm([4 1 2 -h2],cos_obs*Cbar',1)
lmiterm([4 1 2 h2],-cos_obs,Cbar)
lmiterm([4 2 2 p2],sin_obs,A2bar,'s')
lmiterm([4 2 2 h2],-sin_obs,Cbar,'s')

lmiterm([-5 1 1 p2],1,A2bar,'s')
lmiterm([-5 1 1 h2],-1,Cbar,'s')
lmiterm([-5 1 1 p2],2*100,1)

lmisys2 = getlmis

c2 = mat2dec(lmisys2,zeros(6),zeros(6,4),1)
options2 = [100 0 0 0 0]

[copt2 xopt2] = mincx(lmisys2,c2,options2)

P2 = dec2mat(lmisys2,xopt2,p2)
H2 = dec2mat(lmisys2,xopt2,h2)
Gamma2 = dec2mat(lmisys2,xopt2,gamma2)

L2 = inv(P2)*H2
pole_observer2 = eig(A2bar-L2*Cbar)

%% Perancangan Kontroler Kompensator

% mencari K dengan LMI

```

```

sin1 = sin(30*pi/180);
sin2 = sin(30*pi/180);
cos1 = cos(30*pi/180);
cos2 = cos(30*pi/180);
lambda1 = 0.8;
lambda2 = 0.8;

kq = 4640
kf = 4640

%% mencari K1
setlmis([]);

q1 = lmivar(1,[6 1]);
f1 = lmivar(2,[1 6]);

lmiterm([1 1 1 q1],-1,1);

lmiterm([2 1 1 q1],Alhat,1,'s');
lmiterm([2 1 1 f1],B1hat,1,'s');
lmiterm([2 1 1 q1],2*lambda1,1);

lmiterm([3 1 1 q1],sin1*Alhat,1,'s');
lmiterm([3 1 1 f1],sin1*B1hat,1,'s');
lmiterm([3 1 2 q1],cos1*Alhat,1);
lmiterm([3 1 2 q1],-cos1,Alhat');
lmiterm([3 1 2 f1],cos1*B1hat,1);
lmiterm([3 1 2 -f1],-cos1,B1hat');
lmiterm([3 2 2 q1],sin1*Alhat,1,'s');
lmiterm([3 2 2 f1],sin1*B1hat,1,'s');

lmiterm([4 1 1 0],-kf)
lmiterm([4 1 2 -f1],1,1)
lmiterm([4 2 2 0],-1)

lmiterm([-5 1 1 q1],1,1)
lmiterm([-5 1 2 0],1)
lmiterm([-5 2 2 0],kq)

```



```

lmisys1 = getlmis;
[tmin1, xfeas1] = feasp(lmisys1);
Q1 = dec2mat(lmisys1,xfeas1,q1);
F1 = dec2mat(lmisys1,xfeas1,f1);
K1 = F1*inv(Q1);
pole_kontroler1 = eig(A1hat+B1hat*K1);

%% mencari K2
setlmis([]);

q2 = lmivar(1,[6 1]);
f2 = lmivar(2,[1 6]);

lmiterm([1 1 1 q2],-1,1);

lmiterm([2 1 1 q2],A2hat,1,'s');
lmiterm([2 1 1 f2],B2hat,1,'s');
lmiterm([2 1 1 q2],2*lambda2,1);

lmiterm([3 1 1 q2],sin2*A2hat,1,'s');
lmiterm([3 1 1 f2],sin2*B2hat,1,'s');
lmiterm([3 1 2 q2],cos2*A2hat,1);
lmiterm([3 1 2 q2],-cos2,A2hat');
lmiterm([3 1 2 f2],cos2*B2hat,1);
lmiterm([3 1 2 -f2],-cos2,B2hat');
lmiterm([3 2 2 q2],sin2*A2hat,1,'s');
lmiterm([3 2 2 f2],sin2*B2hat,1,'s');

lmiterm([4 1 1 0],-kf);
lmiterm([4 1 2 -f2],1,1);
lmiterm([4 2 2 0],-1);

lmiterm([-5 1 1 q2],1,1);
lmiterm([-5 1 2 0],1);
lmiterm([-5 2 2 0],kq);

```

```

lmisys2 = getlmis;

```

```

[tmin2, xfeas2] = feasp(lmisys2);
Q2 = dec2mat(lmisys2,xfeas2,q2);
F2 = dec2mat(lmisys2,xfeas2,f2)
K2 = F2*inv(Q2);

pole_kontroler1,tmin1
pole_kontroler2 = eig(A2hat+B2hat*K2),tmin2

K1
K2

Kc1 = K1(5:6)
K1 = K1(1:4)

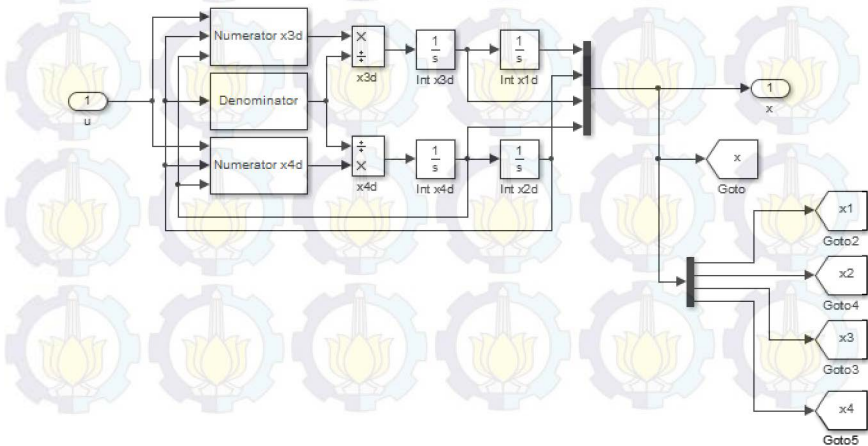
Kc2 = K2(5:6)
K2 = K2(1:4)

pole_kontroler1,tmin1
pole_kontroler2,tmin2

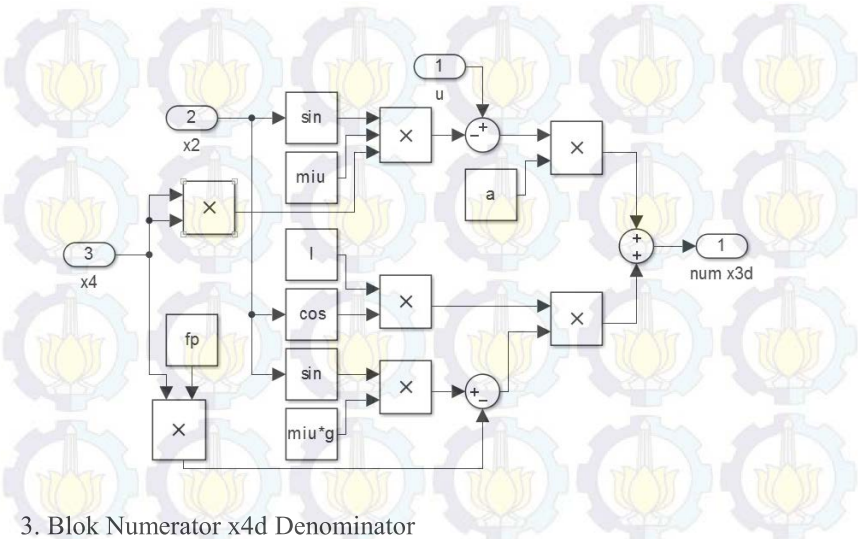
```

B.2 Blok Diagram Simulink

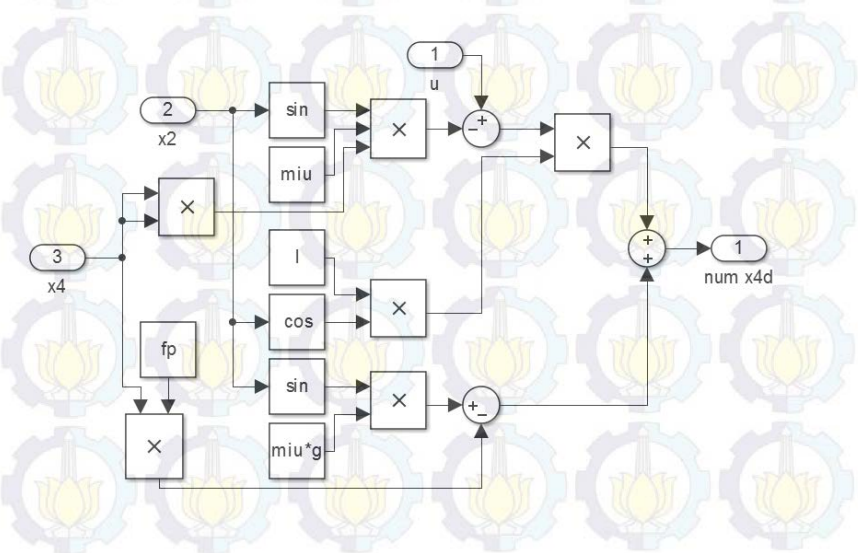
1. Blok Sistem Pendulum Kereta



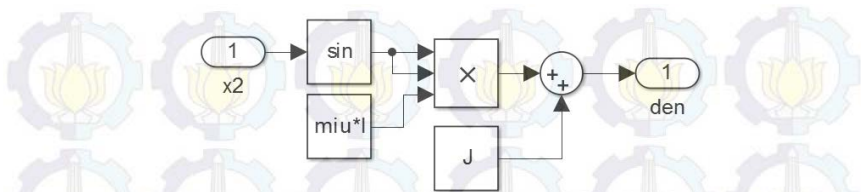
2. Blok Numerator x3d



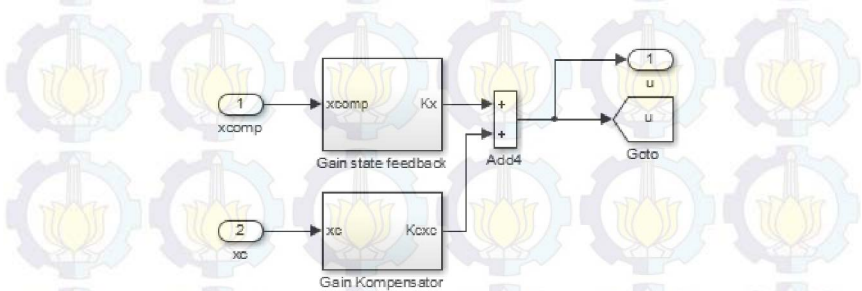
3. Blok Numerator x4d Denominator



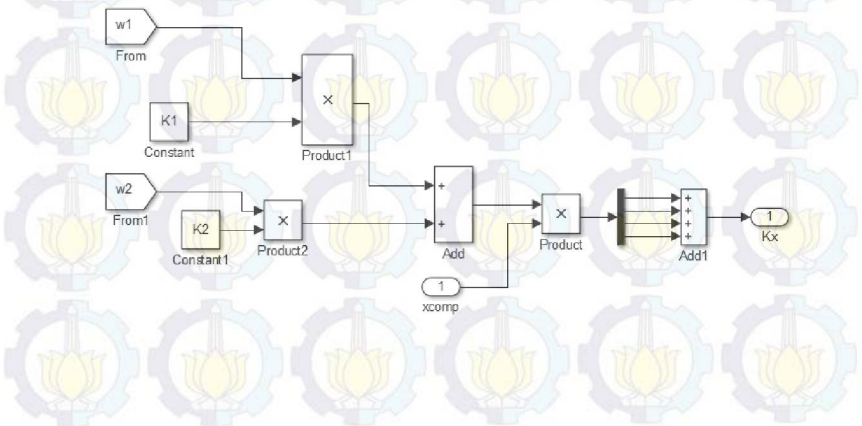
4. Blok Numerator x4d



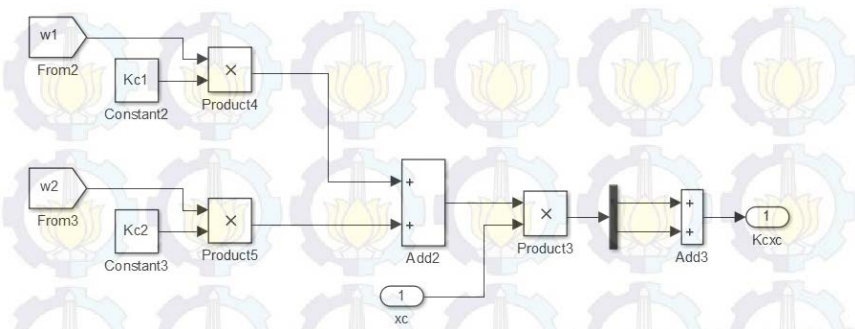
5. Blok Kontroler State Feedback Fuzzy T-S



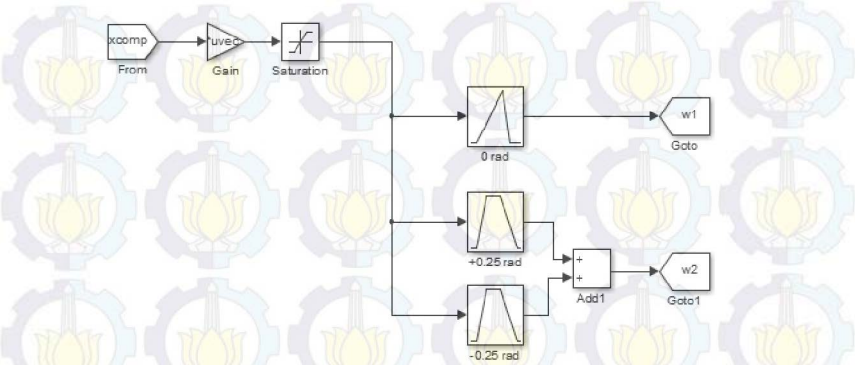
6. Blok Gain State Feedback



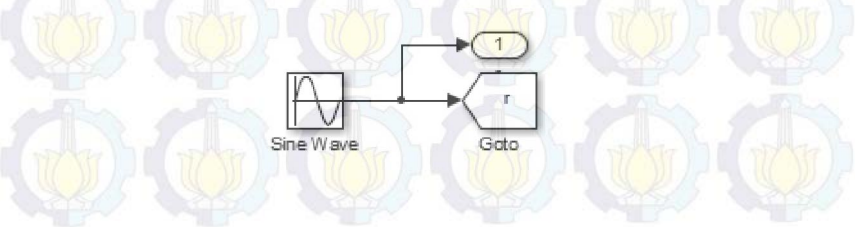
7. Blok *Gain* Kompensator



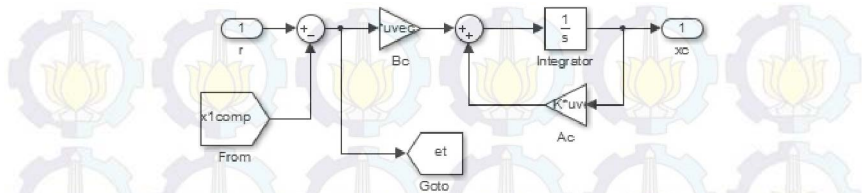
8. Blok Fungsi Keanggotaan



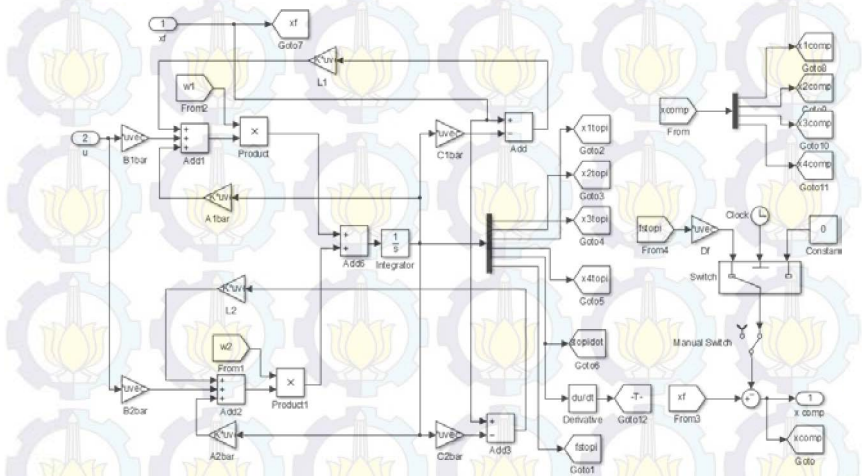
9. Blok Referensi



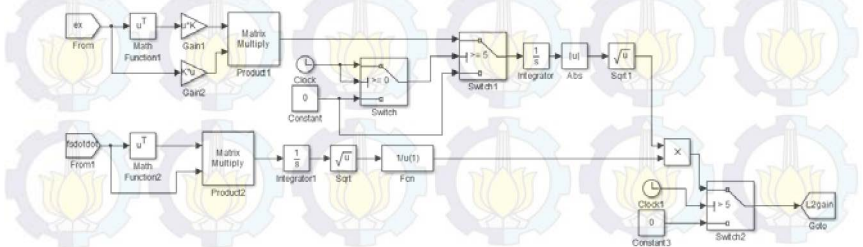
10. Blok Kompensator



11. Blok PMIO Fuzzy T-S



12. Blok L2-Gain



13. Blok Scope

